الملحـــــــق
الثـــــــاني

II عزوم قصور الأنظمة والأجسام الجاسئة

INERTIAL MOMENTS of SYSTEM of PARTICLES & RIGID BODIES

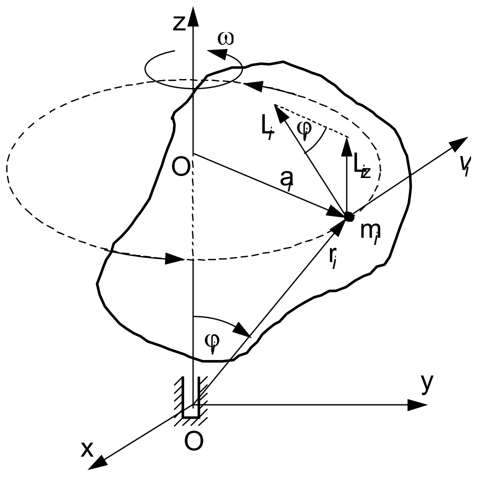
يتحدد موقع مركز كتلة النظام المكون من جسمين، متساويي الكتلة في نقطةٍ عند منتصف المسافة بين الجسمين، دون أهميةٍ لطول المسافة تلك ولكتلتهما أيضاً. لكن من جهةٍ أخرى، لا يحدد موقع مركز كتلة النظام بالضرورة حركة هذا النظام تحديداً كاملاً. فعند التأثير بزخمٍ زاوي ثابت $\mathbf{L}=L\boldsymbol{k}$ =const.، على النظام المكون من المنزلقين المتساويي الكتلة A و B، المتحركين على الدليل الأفقي DE وعلى البعد نفسه عن محور الدوران العمودي Oz، شكل 1.II، نلاحظ إبطاءً في حركة النظام كلما ابتعد المنزلقان بعضهما عن بعض، وتسارعاً عند اقترابهما. كما نرصد الملاحظة نفسها عند تكبير كتل المنزلقين أو تصغيرهما. من جهةٍ أخرى، يحتاج فتىً يحمل مقلاعاً ليصيب هدفاً بحجر، بالإضافة إلى معرفة كتلة الحجر وسرعة الدوران لحظة القذف، إلى معرفة طول الحبل اللازم للقذف. كما أن إحساس الفتى بقدرته يجعله يختار حجراً معيناً، ذا كتلة معينة دون غيره ليقذفه. هذان المثلان يثبتان أن حركة الأنظمة والأجسام الجاسئة تتحدد بمفهومٍ ديناميكي جديد يأخذ بالحسبان كتلة الجسم المتحرك وبعده عن محور الدوران؛ هذا المفهوم الجديد هو **عزم القصور** للجسم والنظام.

اعتبر الحالة العامة: جسمٌ جاسئٌ، كتلته موزعةٌ بأي شكل ، يدور حول محورٍ مختار اعتباطاً، شكل 2.II. نفترض أن هذا الجسم الجاسئ يتكون من مجموعة جسيمات، عددها n، وأحد هذه الجسيمات i، ذو كتلةٍ m_i، يتحرك حول محور الدوران Oz في مسارٍ دائري، نصف قطره a_i. الزَّخَمُ الزَّاوِيّ لهذا الجسيم بالنسبة إلى نقطة الأصل O

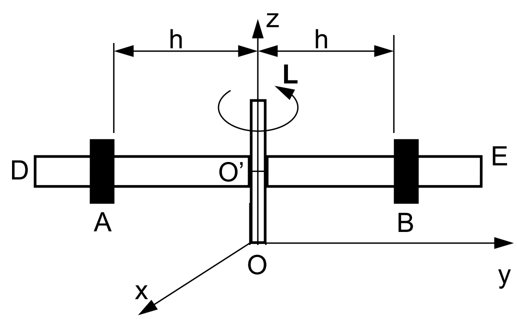
$$\mathbf{L}_i = m_i\ \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \qquad 1.\text{II}$$

ولأن $\boldsymbol{v}_i$ تعامد $\mathbf{r}_i$ فإن مقدار الزَّخَمَ الزَّاوِيّ

$$L_i = m_i\, r_i\ v_i \qquad 2.\text{II}$$



شكل 2.II



شكل 1.II

من جهةٍ أخرى، يصنع المتجه $\mathbf{r}_i$ الزاوية φ_i مع محور الدوران، و $\mathbf{L}_i \perp \mathbf{r}_i$، لذلك فالمركبة العمودية للزَّخَمُ الزَّاوِيّ

$$L_{iz} = L_i \cos(90^o - \varphi_i) \Rightarrow L_{iz} = m_i\ r_i\ v_i\ \sin\varphi_i \qquad 3.\text{II}$$

وباستبدال الكميتين، سرعة الجسيم i وبعده

$$v_i = a_i\ \omega \quad \& \quad a_i = r_i\ \sin\varphi_i$$

في المعادلة 3.II، ينتج أن

$$L_{i\ z} = m_i\ a_i^2\ \omega \qquad 4.II$$

وبالجمع لكلّ الجسيمات، نحصل على مركبة z للزَّخَمِ الزَّاويّ للجسم الجاسئ

$$L_z = \left\{\sum_{i=1}^{n} m_i\ a_i^2\right\}\omega \ \Rightarrow\ L_z = I\,\omega \qquad 5.II$$

إنَّ التدقيق في المعادلة 5.II يثبت أن الزّخم الزّاويّ لا يعتمد على موقع نقطة الأصل، التي قد تكون أيّ نقطةٍ على محور الدوران. كما تثبت المعادلة نفسها أن L_z يتناسب طردياً مع ω، وثابت التناسب المكافئ للكمية بين القوسين يعتمد على حجم وتوزيع الكتلة بالنسبة إلى محور الدوران وليس على السرعة الزاوية. أي أنه مستقلّ عن معدل الدوران. وهذا الثابت هو بالتعريف **عزمُ قصور الجسم**

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i\ a_i^2 \qquad 6.II$$

وإذا كنا نعالج توزيعاً مستمراً للكتلة، فإن هذا الجمع يؤول إلى التكامل

$$I = \int_M a^2\ dm \qquad 7.II$$

وهذا تكاملٌ محدود ينبغي أن يشمل حدَّاه الجسم الجاسئ بأكمله(الكتلة الكلية). ورغم اختلاف الصورتين، فإن هاتين الصيغتين 6.II و 7.II تَنْطِقَان بالشيء نفسه: **لحساب عزم قصور جسمٍ ما اضرب كتلة كلَّ عنصرٍ من عناصره في مربع بعدها عن المحور، واجمع ذلك لكل عناصر الجسم.**

وقياساً لما ورد أعلاه، يعرف عزمُ القصور لنظام ما بالنسبة لمركزٍ ثابت O، أو لمحورٍ، بأنه مجموع الكميات القياسية المساوية لحاصل ضرب كتلة كل جسيم من جسيمات النظام في مربع بعدها عن هذا المركز الثابت، أو المحور. فالنظام المكون من n جسيم، كتلها m_i، i=1,2,3,....n، ومتَّجِهات مواضعها $\mathbf{r}_i$، له عزم قصورٍ قطبي بالنسبة للمركز الثابت O

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i\ r_i^2 \qquad 8.II$$

وعَزْمُ قُصُورٍ محوري بالنسبة إلى المحور Oz

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\ r_{iz}^2 \qquad 9.II$$

حيث إن r_i و r_{iz} أبعاد الكتلة m_i عن المركز القطبي الثابت O، أو عن محور الدوران Oz بالترتيب. وكما هــو ملاحــظ، فالكميات 6.II - 9.II لعزوم القصور غير سالبة.

أخيراً، إذا كان النظام جسماً جاسئاً، فإن عزم قصوره يحسب بتقسيم كتلته الكلية إلى عددٍ لا محدود من الأجزاء الدقيقة والمتناهية الصغر. وحساب التكامل، كونه معنياً بجمع عددٍ لا نهائي من المساهمات المتناهية الصغر، هو الأداة الرياضية اللازمة لحساب عزم القصور

$$I_z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i\ r_{iz}^2 = \int_M r_z^2\ dm \qquad 10.II$$

كما يمكن حساب عزم قصور الجسم الجاسئ بصيغةٍ أخرى

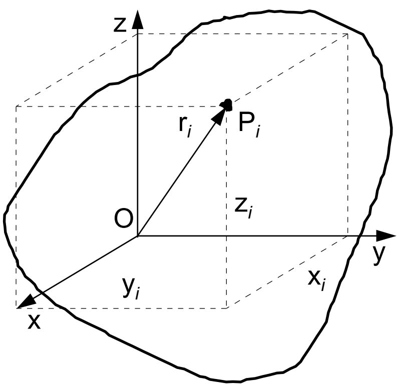
$$I_z = M\,\rho^2 \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \qquad 11.II$$

حيث إن ρ نصف قطر التدوير Radius of Gyration، يُساوي هندسياً بعد المحور Oz عن جسيمٍ، يجب تركيز كل كتلة الجسم الجاسئ فيه، حتى يساوي عزم قصور هذا الجسيم عزم قصور الجسم الجاسئ نفسه.

ويمكن اعتبار أي جسمٍ صلبٍ- كرة بلياردو، خُذْرُوف، أو دولاب سيارة - كنظام جسيمات. فإذا كان الجسم يدور حول محورٍ معين، فإن كلّ دقيقةٍ ماديةٍ متناهية الصغر فيه تكون بمثابة جسيم يتحرك في مسار دائري، ويسهم بنصيبه في الزخم الزَّاوِيِّ للجسم بأكمله.

ولتقدير أهمية مفهوم عزم القصور في الميكانيكا نقارن صيغة الزخم **K=m*v*** بصيغة الزخم الزاوي **L=Iω**. فبينما يتغير الزخم طردياً مع السرجهة ***v***؛ يتغير الزَّخَم الزَّاوِيّ طردياً مع السرجهة الزاوية **ω**. وبذلك فإن عزم القصور I، كالكتلة m، هو خاصيةٌ قصوريةٌ للجسم. إذ نقيس مقاومة الجسم للتغير في السرجهة بواسطة الكتلة m، بينما نقيس بالأخرى مقاومة الجسم للتغير في السرجهة الزاوية. والوَحْدَة الدولية لعزم القصور هي **الكيلوغرام متر تربيع** [kgm^2].

1.II عزوم القصور المحورية للجسم الجاسئ، نظرية المحاور المتوازية
Moments of Inertia about Axis ,Parallel Axis Theorem



شــكل 3.II

إذا دار الجسم الجاسئ حول نقطة اعتباطية ثابتة (والتي نسميها مركز الدوران) O، شــكل 3.II، بحيث يتطابق هذا المركز مع نقطة الإسناد الثابتة للمحاور الديكارتية Oxyz، فإن عزم القصور القطبي لهذا الجسم حول النقطة الثابتة، قياساً على المعادلتين 8.II و 10.II يكتب بالصيغة التالية

$$I_O = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 = \int_M r^2\, dm \qquad 12.II$$

وباستبدال بعد الجسيم (العنصر) P_i عن القطب O (نظرية فيثاغورس) $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ فإن المعادلة 12.II تصبح

$$I_O = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$$

ولينتج بعد ضرب طرفيها في 2، وإعادة ترتيبها أن

$$2\,I_O = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) + \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right) + $$

$$+ \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \qquad 1.13.II$$

وأيضاً، بصيغةٍ تكاملية

$$2\,I_O = \int_M (y^2 + z^2)\, dm + \int_M (z^2 + x^2)\, dm + \int_M (x^2 + y^2)\, dm \qquad 2.13.II$$

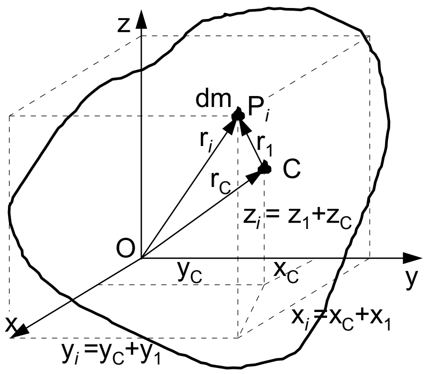
أو بشكلٍ أكثر تحديدا

$$2\,I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} \qquad 14.II$$

هذه المعادلة 14.II تعني أن عزم القصور القطبي لجسم جاسئ حول نقطة ثابتة يساوي نصف مجموع عزوم الجسم المحورية حول المحاور الديكارتية الثلاث المتعامدة، والتي مركزها النقطة الثابتة O. كما تعني المعادلة نفسها أن عزم قصور الجسم المحوري، I_{Ox} مثلاً، يساوي مجموع عزمي القصور بالنسبة لمستويين متعامدين ويشتركان في المحور نفسه Ox. أي أن

$$I_{Ox} = \int_M (y^2 + z^2)\,dm = \int_M y^2 dm + \int_M z^2 dm \qquad 15.II$$

من جهة أخرى؛ يمكن حساب عزم القصور لكتلة الجسم الجاسئ بالنسبة لمحور ما بدلالة عزم قصور الكتلة نفسها بالنسبة لمحور موازٍ له ويمر في مركز الكتلة، وذلك بالطريقة التالية: في الجسم الجاسئ، شكل 4.II، C مركز كتلته و dm أحد عناصره. إذا اعتبرنا أن متَّجِه موضع مركز الكتلة $\mathbf{r}_C$ بالنسبة لمركز الإحداثيات الثابتة Oxyz، وأن متَّجِه موضع العنصر dm بالنسبة للمركز O ولمركز الكتلة C محدد بالمتجهين $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_1$. عزم القصور المحوري لهذا العنصر dm بالنسبة للمحور الثابت Oz، انظر المعادلات 13.II و 14.II



شكل 4.II

$$\mathbf{I_{Oz}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \int_M (x^2 + y^2)\,dm \qquad 16.II$$

حيث إن

$$x_i = x_C + x_1 \quad \& \quad y_i = y_C + y_1 \qquad 17.II$$

بينما x_c و y_c إحداثيا مركز الكتلة، أما x_1 و y_1 فهما إحداثيا العنصر dm بالنسبة لمركز كتلة الجسم . ولذلك نكتب التكامل

$$I_{Oz} = \int_M [(x_C + x_1)^2 + (y_C + y_1)^2]\,dm$$

وبعد فك مجموع المربعين وترتيبه ينتج أن

$$I_{Oz} = \int_M (x_C^2 + y_C^2)\,dm + 2x_C \int_M x_1\,dm + 2y_C \int_M y_1\,dm + \int_M (x_1^2 + y_1^2)\,dm$$

حيث يساوي التكامل الأول المقدار Mr_C^2 بينما يساوي كلاً من التكاملين الأوسطين، قياساً على المعادلة 4.8 الصفر $2x_C \int_M x_1\,dm = 0$ و $2y_C \int_M y_1\,dm = 0$، أمَّا التكامل الأخير فيساوي عزمَ القصور المحوري للجسم الجاسئ بالنسبة للمحور المار بمركز كتلته Cz1، وذلك قياساً على المعادلة 15.II. فنكتب

$$I_{Oz} = Mr_C^2 + I_{Cz1} \qquad 18.II$$

ولذلك، يمكن صياغة **نظرية المحاور المتوازية** Parallel Axis Theorem: **عَزْمُ قُصُورِ الجسم الجاسئ حول محورٍ ما يساوي عزم قصوره حول محور آخر موازٍ له ويمر بمركز كتلته، مضافاً إليه حاصل ضرب كتلة الجسم الكلية في مربع البعد بين المحورين.**

2.II عزوم القصور النابذة، المحاور الرئيسية لعزوم القصور
Centrifugal Moments of Inertia, Axis of Moments of Inertia

إذا ثبت الدليل الأفقي DE بشكلٍ مائل حول محور الدوران الرأسي، شـــكل 1.II، بحيث أن بعدي مركزي الكتلتين عن محور الدوران بقي ثابتاً ، فإن موضع مركز كتل النظام (الكتلتين) لا يتغير، كما لا يتغير عزم القصور لهذا النظام حول المحور Oz مع أن توزيع الكتل أصبح مختلفاً بالنسبة لمحور الدوران. إن توزيع الكتل الجديد سيؤثر على دوران النظام حول المحور ، كما يزيد الضغط على كراسي التحميل. لذلك ينشأ في الميكانيكا، والديناميكا بشكل خاص مفهومٌ جديد هو عزم القصور النابذ (حاصل ضرب القصور) Centrifugal Moment of Inertia كميزة تأخذ في الاعتبار عدم التماثل الناتج من توزيع الكتل، والذي يُعرَّف رياضياً

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i , \quad I_{xz} = I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

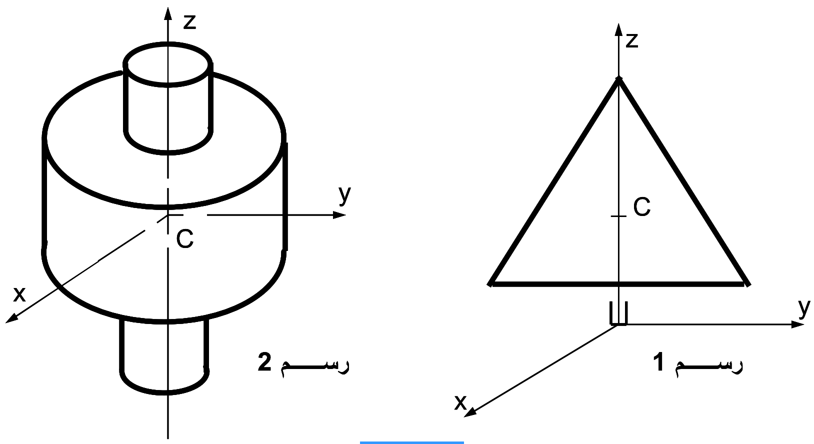
$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \qquad 19.II$$

أو؛ قياساً على المعادلة 10.II، فإن عزوم القصور النابذة للجسم الجاسئ تكون

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_M x\, y\, dm \ , \ I_{xz} = I_{zx} = \int_M x\, z\, dm \quad \&$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_M y\, z\, dm \qquad 20.II$$

وعلى عكس العزوم المحورية للقصور، فإن عزوم القصور النابذة يمكن أن تكون ذات قيم موجبة أو سالبة، وقد تساوي صفراً في حالات خاصة. ندرس جسماً متجانساً، صفيحةً دقيقة ومثلثة الشكل ذات محور تماثل ينطبق على محور الدوران العمودي Oz، رسم 1، شـــكل 5.II، عندئذ؛ وتبعاً للتماثل بين أجزاء الصفيحة، يناظر كل جزء من الصفيحة، إحـــداثياته (x_i, y_i, z_i)، جزءاً آخر له نفس الكتلة m_i، وإحداثـــيـــاته $(-x_i, -y_i, z_i)$. لذلك، فحاصلي ضرب القصور يتلاشيان



شـــكل 5.II

$$I_{xz}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to 0}}\sum_{i=1}^{n} m_i\ x_i\ z_i\ =0\ ,\ I_{yz}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to 0}}\sum_{i=1}^{n} m_i\ y_i\ z_i\ =0 \qquad 21.II$$

نظراً لأن كل حدٍ في أحد نصفي الصفيحة يناظر حداً آخر مساوياً له في المقدار ومختلفاً معه في الإشارة في النصف الآخر. وعليه يتحدد التماثل في توزيع الكتل بالنسبة للمحور Oz، بأن عزمي القصور النابذين يؤولان للصفر $I_{xz}=I_{yz}=0$. ويسمى المحور Oz الذي ينعدم بالنسبة إليه عزمي القصور النابذين بالمحور الرئيسي Principal Axis. وعلى هذا الأساس، ينطبق محور التماثل لجسم ما على أحد المحاور الرئيسية لقصور الجسم.

إذا درسنا جسماً متجانساً آخر، ذا مستوى تماثل بالإضافة إلى محور التماثل الموجود أصلاً فيه، رسم 2، شكل 5.II، فإن كلَّ جزءٍ فيه، إحداثياتُه (x_i ,y_i ,z_i)، يناظر جزءً آخر له الكتلة نفسها، وإحداثياتُه $(x_i ,y_i ,-z_i)$. وتبعاً لذلك، يتلاشى عزما القصور النابذين $I_{xz}=I_{yz}=0$، ويكون المحور Czمحوراً رئيسياً للقصور. من جهةٍ أخرى، للجسم نفسه مستويا تماثل متعامدان هما المستويان Cxz و Cyz، لذلك تتلاشى عزوم القصور النابذة $I_{xz}=I_{yz}=I_{zx}=0$، وكل محور من محاور الإحداثيات Cxyz يكون محوراً رئيسياً للقصور عند النقطة C.

وتعبر المعادلتان 21.II عن الشرط الرياضي الواجب توفره ليكون المحور Cz، محوراً رئيسياً لقصور الجسم عند النقطة C. وقياساً على ذلك، إذا كانت

$$I_{xy} = I_{yz} =I_{zx} = 0 \qquad 22.II$$

فإن كل محور من محاور الإحداثيات Cxyz يكون محوراً رئيسياً للقصور عند النقطة C. وتسمى عزوم القصور للجسم حول المحاور الرئيسية بعزوم القصور الرئيسية للجسم. أما محاور القصور المقامة من مركز كتلة الجسم فتسمى بالمحاور الرئيسية لقصور الجسم.

وينتج مما سبق إثباته؛ أنه إذا كان للجسم محور تماثل، فإن هذا المحور يكون أحد المحاور الرئيسية لقصور الجسم، لأن مركز كتلة الجسم يقع على هذا المحور. أما إذا كان للجسم مستوى تماثل فإن العمود المقام على هذا المستوى، والمار بمركز كتلة الجسم يشكل أحد المحاور الرئيسية لقصور الجسم. ومع ذلك فمن الممكن أن نمد عبر أي نقطة من نقط الجسم ما لا يقل عن ثلاثة محاور متعامدة، تتحقق بالنسبة إليها المعادلات 22.II، وتكون محاور رئيسية لقصور الجسم عند هذه النقطة.

ولمفهوم المحاور الرئيسية للقصور دور مهم في ديناميكا الجسم الجاسئ. فإذا كانت المحاور الرئيسية للقصور منطبقةً على محاور الإحداثيات Cxyz وبنفس اتجاهاتها، فإن عزوم القصور النابذة الصفرية تجعل المعادلات والعلاقات المناظرة لحركة الجسم الجاسئ حول نقطة ثابتة مبسطة للغاية. كما يرتبط بهذا المفهوم حل مسائل التوازن الديناميكي ومركز الصدمة وغيرها.

3.II أمثلة لحساب عزوم القصور لبعض الأجسام المتجانسة والمنتظمة

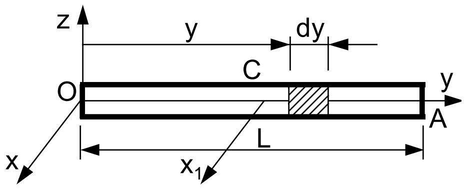
1.3.II عزم قصور قضيب رفيع، كتلته M وطوله L

نحسب عزم القصور للقضيب الرفيع OA، شكل 6.II بالنسبة إلى محورٍ يتعامد معه ويمُرُّ في إحدى نهايتيه. نحدد في القضيب الذي كتلته M وطوله L، عنصراً element أولياً، يتواجد على بعد y من نقطة الأصل O بينما طوله dy. كتلة هذا العنصر الأولي.

$$dm = \rho dy$$

حيث ρ الكثافة الطولية للقضيب أو كتلة وحدة طوله $\rho=M/L$. يتحدد عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور Ox من المعادلة 15.II بعد إلغاء الجزء الثاني $z=0$

$$I_{Ox} = \int_M y^2\, dm = \rho\int_0^L y^2 dy = \frac{M}{3L}\, y^3\Big|_0^L$$



شكل 6.II

$$I_{Ox} = \frac{1}{3}ML^2 \qquad 1.23.\text{II}$$

وعلى نفس المنوال، نحسب عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور Oz

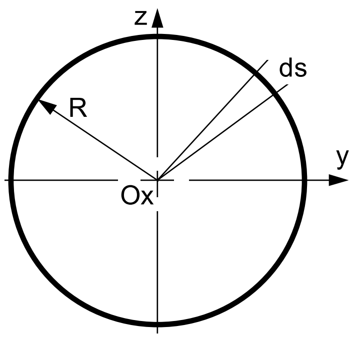
$$I_{Oz} = \frac{1}{3}ML^2 \qquad 2.23.\text{II}$$

من جهةٍ أخرى، نستخدم نظرية المحاور المتوازية والمعادلة 18.II بالتحديد لحساب عزم قصور نفس القضيب حول المحور المار في مركز كتلته والعمودي على المحور Cx_1 Oy

$$I_{Cx1} = I_{Ox} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2$$

$$I_{Cx1} = \frac{1}{12}ML^2 \qquad 24.\text{II}$$

.II عزم قصور حلقة دائرية رفيعة، كتلتها M ونصف قطرها R



شكل 7.II

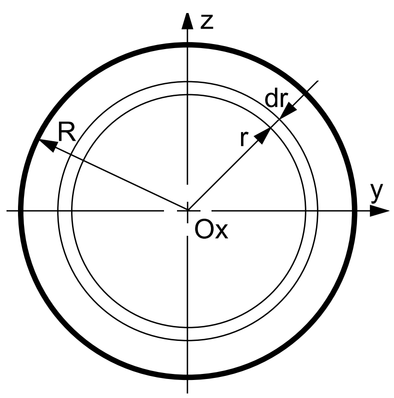
نمثل في الحلقة، شكل 7.II، عنصراً أولياً، طوله ds وكتلته dm، $dm=\rho ds$، حيث ρ الكثافة الطولية للحلقة أو كتلة وحدة طوله، $\rho = \dfrac{M}{2\pi R}$.

عزم قصور الحلقة بالنسبة للمحور Ox العمودي على مستوى الحلقة والمار في مركزها

$$I_{Ox} = \int_M R^2 dm = \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} R^2 ds = \frac{M}{2\pi R}\times R^2 \times 2\pi R$$

$$I_{Ox} = M\,R^2 \qquad 25.\text{II}$$

3.3.II عزم قصور صفيحة دائرية رفيعة، كتلتها M ونصف قطرها R



شكل 8.II

نمثل في الصفيحة الدائرية عنصراً أولياً، يأخذ شكل الحلقة، شكل 8.II، على بعد r من المركز، بينما سمكه dr. كتلة العنصر الأولي

$$dm = 2\,\pi\, r\, \rho\, dr$$

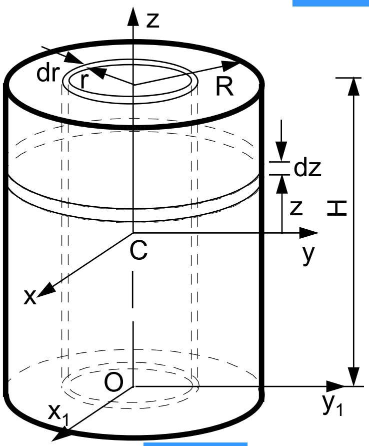
حيث ρ كتلة وَحْدَة مساحتها $M = \rho R^2 \pi$. عزم قصور الصفيحة الدائرية بالنسبة للمحور Ox العمودي على مستوى الصفيحة والمار في مركزها

$$I_{Ox} = \int_M r^2\, dm = 2\,\pi\,\rho\int_0^R r^3\, dr = 2\pi\,\frac{M}{\pi R^2}\,\frac{R^4}{4}$$

$$I_{Ox} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad 26.\text{II}$$

4.3.II عزم قصور أسطوانة متجانسة ومنتظمة، كتلتها M ونصف قطرها R وارتفاعها H

1.4.3.II عزم قصور الأسطوانة بالنسبة للمحور الطولي المار بمركزها Cz



شكل 9.II

نحدد في الأسطوانة عنصر الكتلة الذي يأخذ شكل الأنبوبة الدائرية، شكل 9.II، نصف قطره r وسمكه dr، بينما يكافئ ارتفاعه ارتفاع الأسطوانة H. كتلة هذا العنصر الأولي

$$dm = \rho\, dV = 2\pi\rho\, r\, H\, dr$$

حيث ρ كثافة الأسطوانة، V حجمها، M كتلتها ونصف قطرها R

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$$

عزم قصور الأسطوانة بالنسبة للمحور Cz

$$I_{Cz} = \int_M r^2 dm = 2\pi\rho H \int_0^R r^3\, dr = H\frac{2\pi M}{\pi R^2 H}\frac{R^4}{4}$$

$$I_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad 27.\text{II}$$

2.4.3.II عزم قصور الأسطوانة النابذ

نمثل في الأسطوانة عنصراً أولياً، يأخذ شكل الصفيحة الرقيقة، **شكل** 9.II، على بعد z من المستوى Cxy وارتفاعه dz. كتلة هذا العنصر الأولي

$$dm = \rho R^2 \pi\, dz$$

وتبعاً لذلك، نحسب

$$I_{Cxy} = \int_M z^2\, dm = \rho R^2\pi \int_{-H/2}^{H/2} z^2\, dz = \rho R^2 \pi \left.\frac{z^3}{3}\right|_{-H/2}^{H/2} = \frac{M}{3H}\left\{\left\{\frac{H}{2}\right\}^3 - \left\{-\frac{H}{2}\right\}^3\right\}$$

$$I_{Cxy} = \frac{1}{12}MH^2 \qquad 28.\text{II}$$

من جهةٍ أخرى، عزم القصور المحوري يساوي مجموع عزمي القصور بالنسبة لمستويين متعامدين ويشتركان في المحور نفسه، انظر المعادلة 15.II

$$I_{Cz} = \int_M y^2\, dm + \int_M x^2\, dm = I_{Cxz} + I_{Cyz} \qquad 29.\text{II}$$

ولانتظام شكل الأسطوانة، فإنَّ

$$I_{Cxz} = I_{Cyz} = 0.5\, I_{Cz} \Rightarrow \quad I_{Cxz} = I_{Cyz} = \frac{1}{4}MR^2 \qquad 30.\text{II}$$

كما أن القياس على المعادلة 29.II يُمَكِّننا من حساب عزوم القصور المحورية الأخرى لكتلة الأسطوانة

$$I_{Cx} = I_{Cxy} + I_{Cxz} = \frac{1}{12}MH^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + H^2)$$

$$I_{Cy} = I_{Cxy} + I_{Cyz} = \frac{1}{12}MH^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + H^2)$$

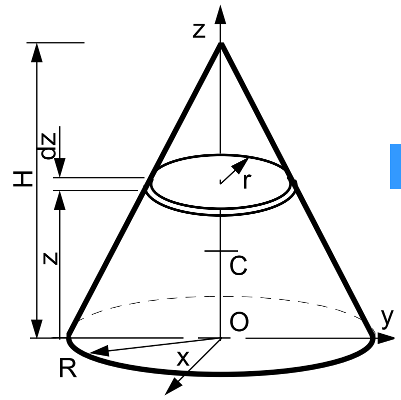
$$I_{Cx} = I_{Cy} = \frac{1}{12}M(3R^2 + H^2) \qquad 31.\text{II}$$

وأخيراً، نحسب عزم قصور الأسطوانة النابذ بالنسبة للقاعدة Ox_1y_1 وذلك من نظرية المحاور المتوازية، معادلة 8.II

$$I_{Ox_1y_1} = I_{Cxy} + \frac{1}{4}MH^2 = \frac{1}{12}MH^2 + \frac{1}{4}MH^2 \Rightarrow I_{Ox_1y_1} = \frac{1}{3}MH^2 \qquad 32.II$$

$$I_{Ox_1y_1} = I_{Cxy} + \frac{1}{4}MH^2 = \frac{1}{12}MH^2 + \frac{1}{4}MH^2$$

$$I_{Ox_1y_1} = \frac{1}{3}MH^2$$



شـكل 10.II

5.3.II عزم قصور المخروط المنتظم، كتلته M ، ارتفاعه H ونصف قطر قاعدته R

نحدد في المخروط عنصراً أولياً على شكل صفيحةٍ دائرية رقيقةٍ، نصف قطره r وسمكه dz، شـكل 10.II. كتلة هذا العنصر الأولي dm، $dm = \rho dV$ $dm = \rho r^2 \pi dz$. كثافة المخروط تتحدد من العلاقة الرياضية التالية:

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}R^2\pi H}$$

عزم قصور الصفيحة الواحدة بالنسبة للمحور Cz، قياساً على المعادلة 26.II

$$dI_{Cz} = \frac{1}{2}dm\,r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dz$$

وباستبدال ρ وعنصر الارتفاع dz بدلالة أبعاد المخروط

$$\frac{r}{R} = \frac{H-z}{H} \Rightarrow z = H - \frac{H}{R}r \Rightarrow dz = -\frac{H}{R}dr$$

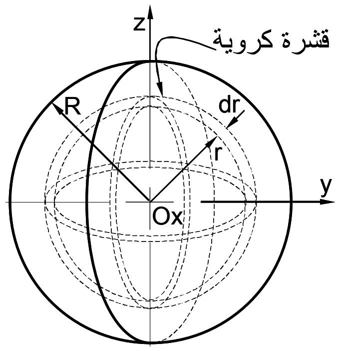
ثُمَّ إجراء التكامل يكون

$$I_{Cz} = \int_M dI_{cz} = \frac{1}{2}\rho\,\pi\int_0^H r^4 dz = -\frac{1}{2}\frac{3M}{R^3}\int_R^0 r^4 dr = \frac{1}{2}\frac{3M}{R^3}\frac{R^5}{5}$$

$$I_{Cz} = \frac{3}{10}MR^2 \qquad 33.II$$

6.3.II عزم قصور كرة، كتلتها M، ونصف قطرها R

نحدد في الكرة، شـكل 11.II عنصراً يأخذ شكل قشرة كروية نصف قطره r وسمكه dr. حجم هذه القشرة $dV = 4r^2\pi dr$، وكتلتها



شـكل 11.II

$$dm = \rho\,dV = \frac{3M}{4\pi R^3}4r^2\pi\,dr = 3\frac{M}{R^3}r^2\,dr$$

عزم القصور القطبي للكرة

$$I_O = \int_M r^2\,dm = \frac{3M}{R^3}\int_0^R r^4\,dr = \frac{3M}{R^3}\frac{R^5}{5}$$

$$I_O = \frac{3}{5}MR^2 \qquad 34.II$$

ولخاصية التناظر الكروي يكون $I_x = I_y = I_z$ بينما يُبيِّن الاعتماد على المعادلة 14.II أنّ $2I_O = 3I_x$. ولذلك فإن

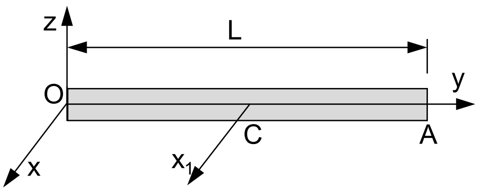
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}I_O = \frac{2}{5}MR^2 \qquad 35.II$$

4.III عزوم القصور لبعض الأجسام والأشكال الهندسية

قضيبٌ رفيع

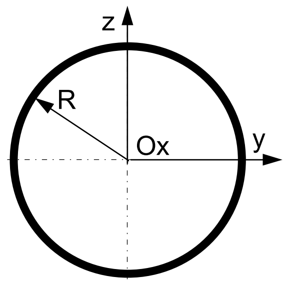
$$I_x = I_z = \frac{1}{3}ML^2 \;,\; I_y = 0$$

$$I_{x1} = \frac{1}{12}ML^2$$



قضيبٌ منثنٍ على شكل دائرة

$$I_x = MR^2 \,,\, I_y = I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

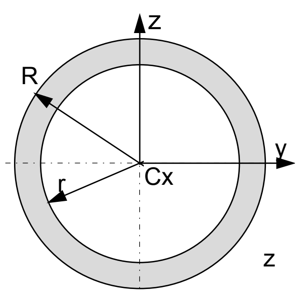


صفيحة دائرية على شكل حلقة

$$I_x = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) \,,\, I_y = I_z = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2)$$

صفيحة دائرية ، r=0

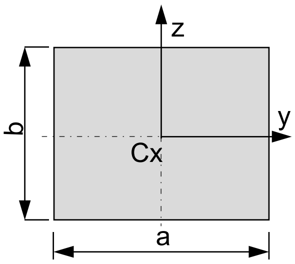
$$I_x = \frac{1}{2}MR^2 \;,\; I_y = I_z = \frac{1}{4}MR^2$$



صفيحة مستطيلة رقيقة

$$I_x = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \,,\, I_y = \frac{1}{12}Mb^2 \,,$$

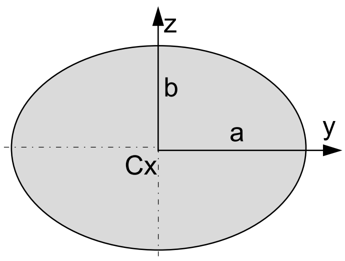
$$I_z = \frac{1}{12}Ma^2$$



صفيحة إهليلجيّة رقيقة

$$I_x = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$$

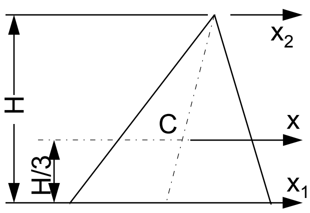
$$I_y = \frac{1}{4}Mb^2 \;,\; I_z = \frac{1}{4}Ma^2$$



صفيحة مثلثة رقيقة

$$I_x = \frac{1}{18}MH^2$$

$$I_{x1} = \frac{1}{6}MH^2 \;,\; I_{x2} = \frac{1}{2}MH^2$$



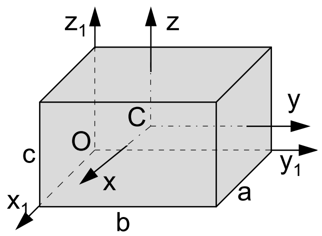
متوازي المستطيلات المنتظم

$$I_x = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)\ ,\ I_y = \frac{1}{12}M(a^2+c^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3}M(b^2+c^2)\ ,\ I_{y1} = \frac{1}{3}M(a^2+c^2)$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$



مكعب طول ضلعه a

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6}Ma^2,$$

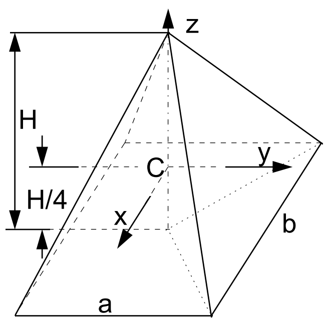
$$I_{x1} = I_{y1} = I_{z1} = \frac{2}{3}Ma^2$$

هرم منتظم قاعدته مستطيلة

$$I_x = \frac{1}{80}M(4a^2+3H^2),$$

$$I_y = \frac{1}{80}M(4b^2+3H^2)$$

$$I_z = \frac{1}{20}M(a^2+b^2)$$



هرم منتظم قاعدته مربعة ، a=b

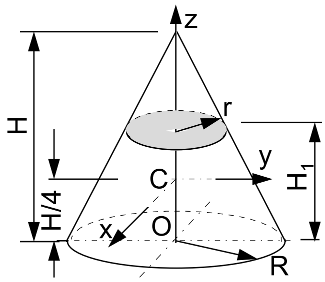
$$I_x = I_y = \frac{1}{20}M(4b^2+3H^2)\ ,\ I_z = \frac{1}{10}Ma^2$$

مخروط منتظم

$$I_x = I_y = \frac{3}{80}M(4R^2+H^2),\ I_z = \frac{3}{10}MR^2$$

مخروط ناقص ومنتظم

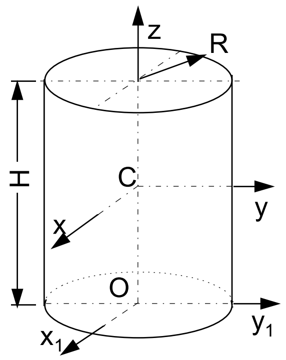
$$I_z = \frac{3}{10}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$$



أسطوانة منتظمة

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}M(3R^2+H^2),\ I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{1}{12}M(3R^2+4H^2)$$



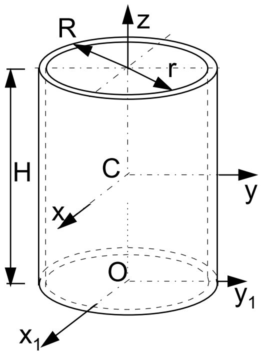
أنبوبة دائرية منتظمة

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}M(3R^2+3r^2+H^2),$$

$$I_z = \frac{1}{2}M(R^2-r^2)$$

أنبوبة دائرية منتظمة ورقيقة جداً ، R≅r

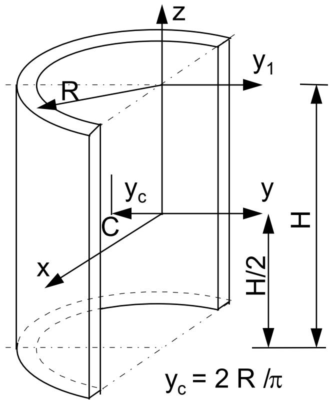
$$I_x = I_y = \frac{1}{12}M(6R^2+H^2)\quad ,\ I_z = MR^2$$



نصف أنبوبة دائرية منتظمة ورقيقة جداً

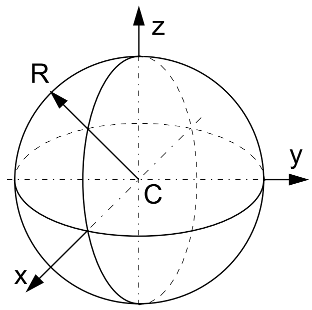
$$I_x = I_y = \frac{1}{12}M(6R^2 + H^2) \quad , \quad I_z = M\,R^2$$

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{1}{6}M(3R^2 + 2H^2)$$



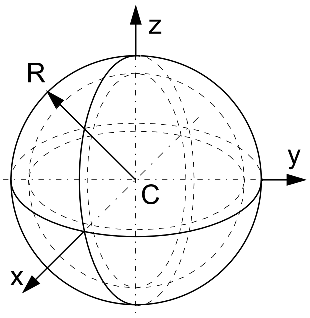
الكرة

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2 \quad , \quad I_C = \frac{3}{5}MR^2$$



كرة مجوفة

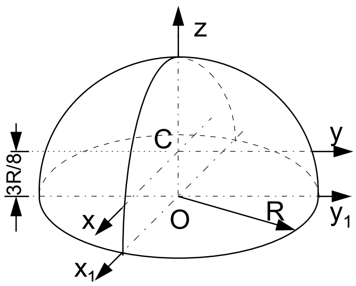
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}MR^2$$



نصف الكرة

$$I_{x1} = I_{y1} = I_{z1} = \frac{2}{5}MR^2,$$

$$I_{Cx} = I_{Cy} = \frac{83}{320}MR^2$$



نصفُ كرةٍ مجوَّف

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}MR^2$$