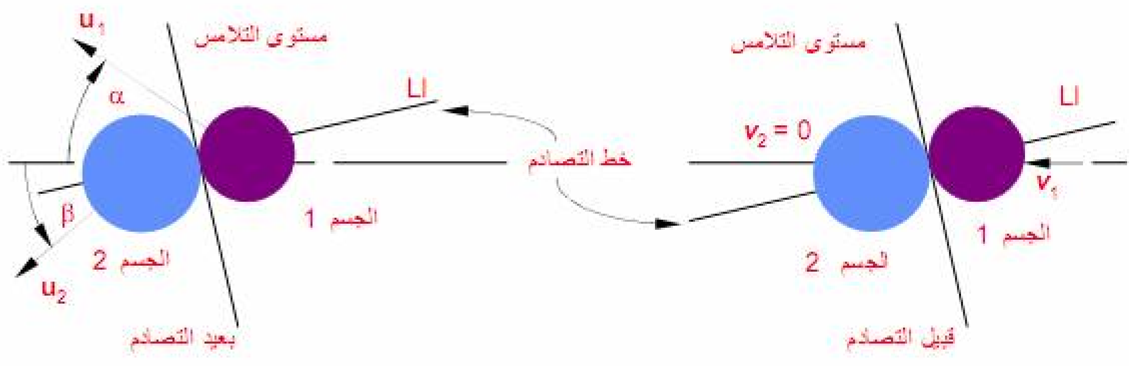
الباب التاسع

التصادم IMPACT

يعتبر ارتطام جسمين بعضهما ببعض بحيث يؤثر كل جسمٍ على الآخر بقوةٍ كبيرةٍ ويحدث ذلك في زمنٍ صغيرٍ جداً مثالاً على التصادم بين جسمين. وفي الحقيقة، تتبدى تصادماتٍ ثنائيةٍ في العديد من حقول الطبيعة بدءً بكرات البيلياردو وانتهاءً بالجسيمات الأولية. وما يهمنا هنا هو دراسة التأثير الميكانيكي للصدمة على الجسم (النظام) المتحرك، أي معرفة حركته قبل وبعد تصادمه مع جسمٍ آخر.

اعتبر جسمين أملسين، كتلتاهما m_1 وm_2، **شكل 1.9**. يتحرك الأول بالسرجهة $\boldsymbol{v}_1$ باتجاه الثاني، الذي يكون في حالة سكون، $\boldsymbol{v}_2 = 0$. فيتشتت الجسم 1، بعيد التصادم، بسرجهةٍ $\mathbf{u}_1$ تصنع الزاويةَ α مع الاتجاه الابتدائي للحركة؛ بينما يرتدُّ الجسم 2 بسرجهةٍ $\mathbf{u}_2$ تصنع الزاويةَ β مع الاتجاه نفسه للحركة. وتبعاً لذلك فإن حركة كلٍّ من الجسمين 1 و 2 وسرجهتيهما بالتحديد تتغيران تغيراً متصلاً ودونما انقطاع، وذلك تحت تأثير قوةٍ لحظيةٍ تدعى الدفع الصادم Impulse of an Impact خلال فترةٍ زمنيةٍ قصيرةٍ جداً.



شـــكل 1.9

من هنا يتبدى لنا التصادمُ كظاهرةٍ فيزيائيةٍ تحدث نتيجة ارتطامِ جسمين أو أكثر بعضهما مع بعض خلال فترةٍ زمنيةٍ قصيرةٍ جداً. وفي اللحظة التي يحدث فيها التصادم تكون قواهُ عموديةً على مستوى التلامس المار في أولِ نقطةِ تلامس بين الجسمين المتصادمين. ويسمى الخط العمودي على مستوى التلامس بين الجسمين المتصادمين بخط التصادم، ويرمز له بالرمز LI. كما تدعى الفترة الزمنية التي يستغرقها التصادم بفترة التصادم. وبالعادة يدعى التصادم بين جسمين مركزا كتلتيهما على خط التصادم بالتصادم المركزي Central Impact، وعلى النقيض من ذلك، يدعى التصادم اللامتراكز Eccentric Impact بالتصادم الذي يحدث بين جسمين مركزا كتلتيهما لا يقعان على خط تصادمهما. ومن المهم دراسة التصادم المركزي عندما تتسامت سرجهتا الجسمين المتصادمين مع خط تصادمهما، والذي يدعى التصادم المركزي المباشر Direct Central Impact، أو لا تتسامت سرجهتا الجسمين المتصادمين مع خط التصادم، ليدعى عندئذٍ بالتصادم المركزي المائلOblique Central Impact.

1.9 المعادلة الأساسية لحركة الجسم عند التصادم

يؤثر على الأجسام المتصادمة قوىً تتغير بمعدلاتٍ كبيرةٍ جداً، تتراوح قيمُها من الصفر وحتى قيمةٍ عظمى ثمَّ تؤول للصفر. لذلك؛ من الأفضل قياس مقدار التأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام المتصادمة بواسطة دفع القوة - الدفع الصادم Impulse of an Impact وليس القوة نفسها. ويعرَّف دفع القوة رياضياً بالتكامل المحدود، انظر معادلة 2.5

$$\mathbf{P}_{imp} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}_{imp}\, dt \qquad 1.9$$

وهو بالتالي كميةٌ محددةٌ، وإن كانت الفترة الزمنية τ صغيرةً جداً $\tau << 1$ [s]. اعتبر جسماً ، كتلته m، ويتحرك بالسرجهة $\boldsymbol{v}$ التي تغيرت بعيد التصادم مع جسمٍ آخر إلى **u**. نكتب قانون تَغَيُّرَ زخم الجسم، معادلة 6.5

$$m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P}_{imp} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}_{imp}\, dt \qquad 2.9$$

أي أن التغير في زخم الجسم عند تصادمه مع جسم آخر خلال فترة الصدمة يساوي الدفع الصادم المؤثر على ذلك الجسم. وتعتبر المعادلة 2.9 المعادلة الأساسية لحركة الجسم عند التصادم، إذ تلعب الدور نفسه الذي يلعبه قانون نيوتن الثاني في الديناميكا.

ويمكن تعريف هذه المعادلة الاتجاهية 2.9 بثلاث معادلات قياسية عند إسقاطها على المحاور الديكارتية المتعامدة، أو أية مجموعة محاور متعامدة أخرى. كما يمكن إيجاد سرجهة الجسم بعيد تصادمه مباشرة من المعادلة نفسها

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{v} + \mathbf{P}_{imp} / m \qquad 3.9$$

والتي تساوي سرجهة الجسم قبيل التصادم، مضافاً إليها وَحْدَةُ دفع القوة بدلالة الكتلة. وعلى الغرار نفسه، إذا عرفنا موضع الجسم قبيل التصادم بالمتجه **r**، وبعيد التصادم بالمتجه **r'**، فإن سرجهتيه قبيل التصادم وبعيده تعرفان كمشتقتي متَّجهي الموضع. أو رياضياً

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\ ,\ \boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

وباستبدال قيمهما في المعادلة 3.9 ينتج أن

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mathbf{P}_{imp}}{m}$$

وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة الأخيرة مرتين، وحل الناتج بدلالة الإزاحة في متَّجِه الموضع

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \int_0^{\tau} \frac{\mathbf{P}_{imp}}{m}\, dt \cong 0 \qquad 4.9$$

والتي تعني أن إزاحة الجسم نتيجةً للتصادم عن موضعه قبيل التصادم تكاد تكون معدومة، وذلك لصغر الفترة الزمنية τ.
وعلى هذا الأساس يمكن استخلاص النتائج التالية خلال فترة التصادم:

1- يمكن إهمال تأثير القوى غير الدفعية، كقوة الجاذبية مثلاً.

2- يمكن إهمال إزاحات الأجسام المتصادمة واعتبار الأجسام ثابتةً في مواضعها، معادلة 4.9.

3- التغير في سرجهة الجسم محدد، معادلة 2.9.

2.9 قوانين الزَّخَم عند التصادم

1.2.9 قانون تَغَيُّر زَخَم الجسيم والنظام

تحتفظ المعادلة 15.8 الناتجة في البند 1.5.8 بشكلها الأصلي أيضاً. ولأننا نهمل تأثير القوى غير الدفعية عند التصادم يتبقى في الجهة اليمنى للمعادلة المذكورة أعلاه (تأثير) القوى الدفعية فقط. وباستبدال $\mathbf{K}_o = m\,\boldsymbol{v}$ و $\mathbf{K} = m\,\mathbf{u}$ ليتناسب مع الحالة الجديدة ، قبيل التصادم وبعيده على التوالي، فإن المعادلة 15.8 تؤول للشكل التالي

$$m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P} \qquad 5.9$$

وهذا قانون تغير الزخم للجسيم الصادم: **التغير في زخم الجسيم الصادم يساوي الدفع الرئيسي للقوى الصادمة المؤثرة عليه.**

وبشكلٍ عام، إذا كان النظام مكوناً من جسيماتٍ عددها n، فإن قانون حركة الجسيم الاعتباطي i من جسيمات النظام تكافئ المعادلة 5.9 مضافاً إليها الرمز i

$$m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e \qquad 6.9$$

حيث أن $\mathbf{P}_i$ الدفع الرئيســي للقوى الداخلية المؤثــرة على الجسيم المعين i، بينما $\mathbf{P}_e$ الدفع الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على الجسيم نفسه. وإذا افترضنا أن كلّ جسيمات النظام تتصادم في اللحظة نفسها، يمكن كتابة المعادلة 6.9 لكل جسيمات النظام 1 ، 2 ... و n. وبجمع كلّ المعادلات الناتجة حداً حداً نحصل على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,e}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,e} \qquad 7.9$$

إذ يساوي الدفع الرئيسي للقوى الداخلية المؤثرة على النظام صفراً ، $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,i} = 0$. هذه المعادلة 7.9 تعرف قانون تغير زخم النظام عند التصادم: **التَّغَيُّرُ في زَخَمِ النِّظَام خلال فترة التَّصادُمِ يُساوي الدَّفْع الرَّئيسيّ للقوى الخارجية المؤثرة على النظام.**

وإذا كان النظام جسماً جاسئاً، كتلته M، تتحول المعادلة 7.9 وقياساً على المعادلة 5.8 إلى الشكل الأكثر اقتضاباً

$$M\ (\mathbf{u}_c - \boldsymbol{v}_c) = \mathbf{P}_{i\ e} \qquad 8.9$$

حيث أن $\boldsymbol{v}_c$ و $\mathbf{u}_c$ سرجهتي مركز كتلة الجسم الجاسئ قبيل التصادم وبعيده على التوالي.

2.2.9 قانون حفظ زخم الجسيم والنظام

يتحرك الجسيم بنفس السرجهة إذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة المؤثرة على الجسيم مساوياً للصفر. ورياضياً (انظر معادلة 7.5) فإن

$$\mathbf{P} = 0 \rightarrow \quad m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{v} \qquad 9.9$$

وإذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام مساوياً للصفر $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\ e} = 0$ ، معادلة 7.9، فإن هذا النظام يخضع للمعادلة التالية

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ (\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = 0 \qquad 10.9$$

أو

$$m_1\,\mathbf{u}_1 + m_2\,\mathbf{u}_2 + \ \ldots\ldots\ldots + m_n\,\mathbf{u}_n = m\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\ \ \ldots\ldots\ m_n\,\boldsymbol{v}_n \qquad 1.10.9$$

وعلى نفس المنوال، إذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة الخارجية على الجسم الجاسئ مساوياً للصفر $\mathbf{P}_{ie}=0$، معادلة 8.9 ، يتحرك الجسم الجاسئ بنفس السرعة قبيل وبعيد التصادم

$$M\,(\mathbf{u}_c - \boldsymbol{v}_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_c = \boldsymbol{v}_c \qquad 11.9$$

إن الملاحظة الأولية للمعادلات 9.9 - 11.9 تبين أن الدفوع الصادمة الداخلية لا يمكنها التسبب بتغير زخم النظام أو الجسم الجاسئ.

3.9 قوانين الزَّخَم الزَّاوِيّ عند التصادم

1.3.9 قانون تَغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والجسم الجاسئ

لنعتبر النظام مكوناً من فئة جسيماتٍ عددها n. ندرس حركة جسيمٍ اعتباطي من جسيماته i، كتلته m_i وسرجهته قبيل التصادم وبعيده $\boldsymbol{v}_i$ و $\mathbf{u}_i$ على التوالي، حيث i=1,2,3,....n. يُؤثر على الجسيم i الدفع الصادم الداخلي $\mathbf{P}_i$، والدفع الصادم الخارجي $\mathbf{P}_e$. إذا حددنا موضع الجسيم i بالنسبة لمركز الإحداثيات الثابت O بالمتَّجه $\mathbf{r}_i$، فإنه طبقاً للنتيجة الثانية الواردة أعلاه، لا يتغير تموضع الجسيم المذكور عند تصادمه مع جسيمٍ آخر لحظتئذٍ، كما لا تتغير متجهات مواضع جسيمات النظام. وإذا ما ضربنا طرفي المعادلة 6.9 بالمتجه $\mathbf{r}_i$ من اليسار نحصل على

$$\mathbf{r}_i \times m_i\, \mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_e$$

وبكتابة هذه المعادلة لكل جسيمات النظام ثم جمعها حداً حداً

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_e$$

أو

$$\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_v = \mathbf{M}_{pe} \qquad 12.9$$

حيث إن $\mathbf{L}_u$ مُتَّجِه الزَّخَمُ الزَّاوِيّ الرَّئيسيّ بعيد التصادم، بينما $\mathbf{L}_v$ مُتَّجِه الزَّخَمُ الزَّاوِيّ الرَّئيسيّ قبيل التصادم، أما $\mathbf{M}_{pe}$ فهو العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام حول نفس المركز الثابت O. بينما العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الداخلية المؤثرة على النظام حول نفس المركز فيساوي الصفر، وذلك وفقاً لخواص القوى الداخلية $\mathbf{M}_{pi} = 0$. وتمثل المعادلة 12.9 قانون تغير الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام: **التَّغَيُّر في الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام خلال فترة التصادم يساوي العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام.** ومن الطبيعي أن يتمّ إسناد كلٍ من $\mathbf{L}$ و $\mathbf{M}_{pe}$ إلى نفس نقطة الإسناد نفسها.

2.3.9 قانون حفظ الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والجسم الجاسئ

إذا كان العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام المعين صفراً، يبقى الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام ثابتاً مقداراً واتجاهاً. أي أن

$$\mathbf{M}_{pe} = 0 \rightarrow \mathbf{L}_u = \mathbf{L}_v \qquad 13.9$$

وتمثِّل هذه المعادلة 13.9 قانون حفظ الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام خلال فترة التصادم.

4.9 التصادم المركزي المباشر Direct Central Impact

اعتبر حركة كرةٍ، كتلتها m، وتسقط عمودياً على سطحٍ أفقيٍ أملس وثابت بالسرجهة $\boldsymbol{v}$ لحظة ارتطامها بالسطح. يؤثر على الكرة لحظة الارتطام الدفع الصادم العمودي من السطح للأعلى، **شـكل 2.9**. إذا كانت سرجهة ارتداد الكرة من السطح الأفقي للأعلى بعيد التصادم $\mathbf{u}$، فإن معادلة حركة الكرة تكافئ المعادلة 2.9 للجسم الصادم، وذلك تحت تاثير الدفع الصادم $\mathbf{P}_{imp}$ كدفعٍ خارجي وحيد

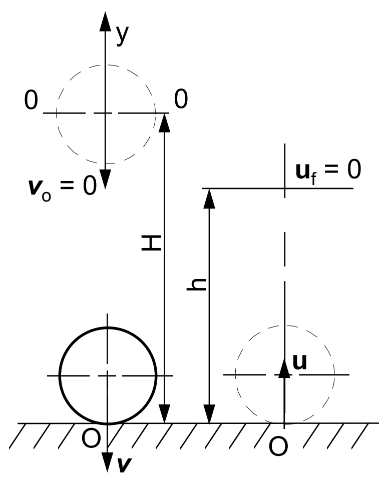
$$m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P}_{imp} \qquad 14.9$$

أو بعد إسقاطها على المحور العمودي Oy يكون

$$m\,(u + v) = P_{imp} \qquad 1.14.9$$

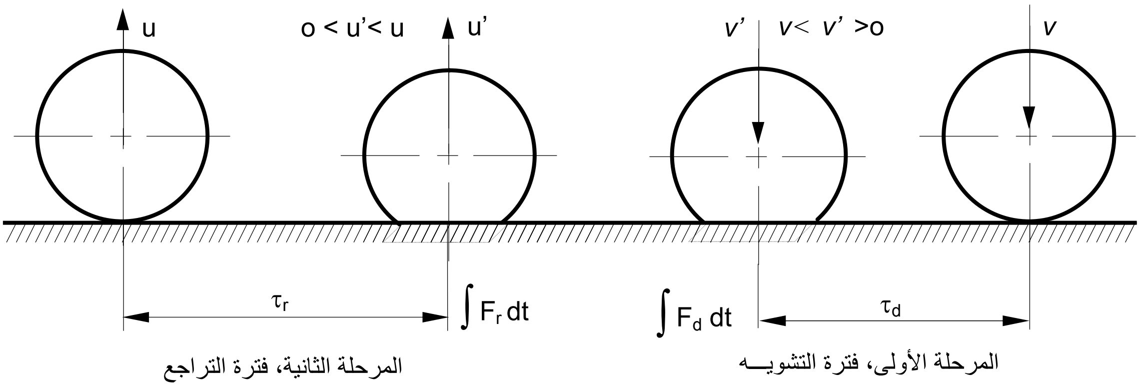
هذه المعادلة 1.14.9 تحوي المجهولين: سرعة الجسم بعيد التصادم u، والدفع الصادم الخارجي P_{imp}. لذا؛ يجب البحث عن معادلة أخرى تربط بين المجهولين المذكورين أو تحدد قيمة أحدهما.

إن سرعة الارتداد (سرعة الجسم بعيد التصادم) u، تعتمد بالإضافة إلى سرعة الارتطام على نوعية المواد المصنوعةِ منها الأجسام المتصادمة. وهذا ما اثبتته التجارب العملية التي بينت أن الأجسام أثناء تصادمها مع الأسطح أو بعضها مع بعض، يجب أن لا تتشوه بشكلٍ مفرط ولا تتفتت نتيجة التصادم. أي أن هذه الفرضية لا تكون صحيحةً عند وجود قوىً كبيرة جداً ومفرطةٍ عند التصادم.



شـــكل 2.9

ويمكن تحديد تصادم الجسم الساقط على السطح الأفقي الثابت بمرحلتين، **شـــكل 3.9**: الأولى تتناقص فيها سرعة الجسم الساقط من v حتى الصفر، وتتحول طاقته الحركية إلى طاقة وضعٍ تؤدي إلى تشوه جزءٍ من الجسم وتسخينهِ، وبالتالي تتعرض أجزاؤه الفاعلة للتشوه والانضغاط لتأثرها بالقوة الدفعية الهائلة F_d خلال فترة التشويه. أما المرحلة الثانية للتصادم فيبدأ الجسم فيها بالعودةِ تدريجياً إلى شكله الأولي، كما تتحول طاقة وضعه الداخلية إلى طاقة حركيةٍ تدفع الجسم للانطلاق من جديد. فيتلاشى التشوه ويختفي نتيجة تأثره بالقوة الدفعية الهائلة F_r خلال فترة التراجع Restitution Period. وحيث أن الجسم لا يستعيدُ تماماً كل طاقته الحركية الأولية لفقدان جزءٍ منها في التسخين وآخر في تشويهِ الجسيم فإن سرعةَ الجسم بعيد التصادم u تكون أقل بالضرورةِ من سرعةِ الارتطام، أي سرعته قبل التصادم.



شـــكل 3.9

وبشكلٍ عام تؤثر القوة F_d على الجسم الصادم لحظة بداية الصدمة وحتى انتهاء فترة التشوه، بينما توثر القوة F_r على الجسم الصادم لحظة انتهاء فترة التشوه وحتى انتهاء الصدمة. وبالعادة يكون الدفع الارتدادي Restitution Impulse أقل من الدفع التشويهي Deformation Impulse، أي أن $\int_0^{\tau_r} F_r\,dt \langle \int_0^{\tau_d} F_d\,dt$. كما تُعَرِّف النسبة بين هذين الدفعين معامل الارتداد Coefficient of Restitution

$$e = \frac{\int_0^{\tau_r} F_r\,dt}{\int_0^{\tau_d} F_d\,dt} \qquad 15.9$$

وبكتابة المعادلة 2.9 وللمرحلتين الأولى والثانية يكون

$$m(v' - v) = -\int_0^{\tau_d} F_d\,dt$$

$$m\ (u - u') = +\int_0^{\tau_r} F_r\,dt$$

ولأن كلاً من السرعتين v' و u' صفر، تؤول المعادلتان السابقتان للشكل التالي

$$m\,v = \int_0^{\tau_d} F_d\,dt$$

$$m\,u = \int_0^{\tau_r} F_r\,dt$$

وبتعويض ذلك في المعادلة 15.9 نكتب معامل الارتداد

$$e = \frac{u}{v} \qquad 16.9$$

الذي يساوي النسبة بين قيمتي سرعة الجسم بعيد التصادم إلى سرعته قبيل التصادم. هذه المعادلة 16.9 تزودنا بطريقة مثلى لقياس معامل الارتداد للمواد المختلفة. فلقياسه بين حديد الزهر والفولاذ مثلا، نسقط كرةً من حديد الزهر من ارتفاعٍ ما، وليكن H، على سطحٍ أملس من الفولاذ، أو بالعكس (الكرة من الفولاذ والسطح الأملس من حديد الزهر). ثمّ نقيس الارتفاع الأقصى الذي وصلته كرة الحديد بعد التصادم. وإذا افترضنا أن الارتفاع الجديد h، فإنه وَفْقاً لقوانين الديناميكا الأساسية يكون معامل الارتداد

$$e = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}} \qquad 17.9$$

لذلك، تتراوح قيمة معامل الإرتداد e بين الصفر والوَحْدَة، ويعتمد على المواد التي تُصنع منها الأجسام المتصادمة وأشكالها وأحجامها وعلى سرعة الصدمة. وعلى ذلك ندرس المثلين التاليين

1 - التصادم اللدن التام [1] Perfectly Plastic Impact، مطلق اللّيونة

يتميز هذا التصادم بأن طاقته الحركية تتحول إلى أشكالٍ أخرى من الطاقة كتشويهه وتسخينه ومعامل ارتداده يتلاشى، أي أن $e = 0$. فضرب كرةٍ من المعجون بأية سرعةٍ إلى سطحٍ ما يؤدي إلى تفلطح الكرة على السطح والتصاقها به دونما قدرة على الارتداد للجهة الأخرى.

2- التصادم المرن التام Perfectly Elastic Impact، مطلقُ المرونة

يتميز هذا التصادم بأن طاقته الحركية تبقى محفوظة ومعامل ارتداده يساوي الوحدة $e=1$. وهذا يعني أن ارتطاماً مرناً لجسم بآخر ثابتٍ بسرعةٍ معينة يجعل الأول يرتد للخلف بنفس السرعة. وعليه نورد الجدول التالي [2] الذي يمثل قيم معامل الارتداد لمواد مختلفة عند التصادم المركزي المباشر.

ولحالة التصادم بين جسمين ، ندرس حركتيهما كما في **الشكل 4.9**، كتلتاهُما m_1 و m_2، وسرعتاهما قبيل الصدمة v_1 و v_2 وبعيد الصدمة u_1 و u_2. لحل هذه المسألة نطبق قانون حفظ زخم النظام المكون من الجسمين المتصادمين، والمعادلة 10.9 بالتحديد. فكلٌ من الدفع الداخلي والقوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام تساوي الصفر. أو رياضياً

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_1 \mathbf{u}_2 = \text{const.}$$

حيث يتمثل زخم النظام قبيل التصادم بالطرف الأيسر وزخم النظام بعيد التصادم بالطرف الأيمن. وبإسقاط هذه المعادلة على الخطِّ الواصل بين مركزي كلا الجسمين يكون

معامل الإرتداد	موادالأجسام المتصادمة
0.95 - 0.93	زجاج بزجاج
0.89 - 0.88	عاج بعاج
0.7 - 0.5	فولاذ بفولاذ
0.6 - 0.5	فلّين بفلّين
0.7 - 0.4	حديد زهر بحديد زهر
0.6 - 0.4	خشب بخشب
0.18 - 0.12	رصاص برصاص
0.15 - 0.11	حديد برصاص
0.0	طين (طَفَل) بطين
0.0	معجون بمعجون

معامل الارتداد التجريبي لبعض المواد

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = \text{const.} \qquad 18.9$$

وكما هو ملاحظٌ، تحوي المعادلة الأخيرة المجهولين u_1 و u_2. ولهذا؛ يجب البحث عن معادلةٍ إضافيةٍ أخرى تربط بين هذين المجهولين. وهذه المعادلة تكون بالعادة معامل الارتداد، الذي يساوي نسبة فرقي السرعتين بعيد التصادم وقبيله. أو رياضياً

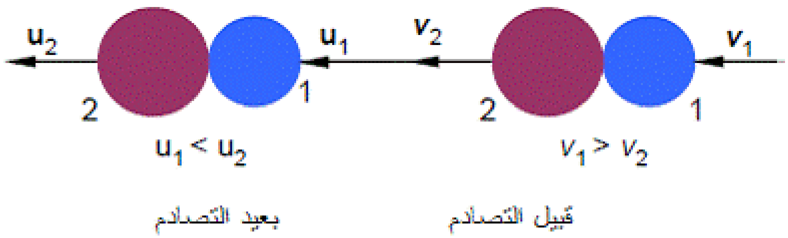
$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \qquad 19.9$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين 18.9 و 19.9 نحصل على

---

[1] يدعى أيضاً بالتصادم اللامرن التام Completely Inelastic Impact.

[2] انظر المرجع 2 من قائمة المراجع الأجنبية، ص647.



شـــكل 4.9

$$u_1 = v_1 - (1+e)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \qquad 20.9$$

$$u_2 = v_2 + (1+e)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \qquad 21.9$$

أما الدفع الصادم فيمكن إيجاد قيمته من قانون تغير زخم الجسم الأول

$$P_{1imp} = m_1 (u_1 - v_1) \qquad 22.9$$

بينما يكون دفع الجسم الثاني الصادم مساوياً للأول مقداراً ومضاداً له في الاتجاه

$$P_{2imp} = - P_{1imp} = m_1 (v_1 - u_1)$$

وباستبدال u_1 من المعادلة 20.8 وتعويضها في المعادلة الأخيرة

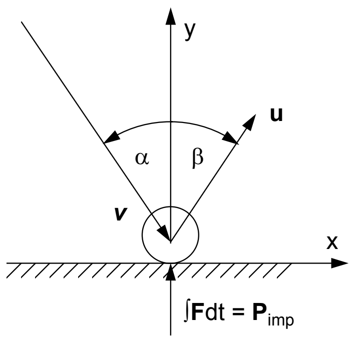
$$P_{1imp} = - P_{2imp} = (1+e)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \qquad 23.9$$

5.9 التصادم المائل Oblique Impact

في هذه الحالة، تصنع سرجهة الجسم الصادم v الزاوية α وتصنع سرجهة الإرتداد **u** الزاوية β مع الرأسي، **شـــكل 5.9**. وبإسقاط المعادلة 5.9 على المحورين المتعامدين x و y

$$u \cos\beta = - v \cos\alpha + P_{imp} / m \qquad 1.24.9$$

$$u \sin\beta = v \sin\alpha \qquad 2.24.9$$



شـــكل 5.9

أي أن المركبتين المماستين (الأفقيتين) للسرجهتين v و u متساويتان، والتصادم لا يحدث إلا في اتجاه العمود على السطح لإهمال تأثير الاحتكاك. لذلك يتحدد معامل الارتداد بالعلاقة

$$e = \frac{u \cos\beta}{v \cos\alpha} \qquad 25.9$$

وبحساب النسبة بين السرعتين بعيد التصادم وقبيله

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad 26.9$$

واستبدال ذلك في المعادلة 25.9 يكون

$$e = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \qquad 27.9$$

وهكذا، فإن معامل الارتداد يساوي نسبة ظل زاوية السقوط Angle of Approach إلى ظل زاوية الارتداد Angle of Rebound. ولأن قيمة معامل الارتداد موجبة وأقل من واحد، $e \le 1$، فإن α تكون بالضرورة أصغر من β؛ أي أن زاوية السقوط أقل من زاوية الارتداد. وعلى هذا الأساس، يمكن حساب مقدار الدفع الصادم P من المعادلة 1.24.9

$$P_{imp} = m(\,u \cos\beta + v \cos\alpha) \qquad 28.9$$

أو بدلالة معامل الارتداد e

$$P_{imp} = m\, v \cos\alpha \,\{\,1 + e\,\} \qquad 29.9$$

طاقة الحركة المفقودة عند التصادم اللدن، نظرية كارنو [3] Carnot's Theorem

عرفنا من التصادم المركزي المباشر، **شكل 2.9**، أن الجسم المرتد للأعلى لن يصل للارتفاع الذي سقط منه لاستنفاد جزءٍ من طاقته الحركية على تشوهه وتسخينه و غيره. ولحساب مقدار الطاقة المفقودة نبدأ بمثالٍ التصادم المركزي المباشر للجسم الساقط من الارتفاع H. طاقة حركة الجسم قبيل الصدمة

$$T_v = 0.5\, m\, v^2$$

بينما طاقة حركته بعيد الصدمة

$$T_u = 0.5\, m\, u^2$$

ولذلك فالطاقة الحركية المفقودة

$$\Delta T = T_v - T_u$$

$$\Delta T = 0.5\, m\, [v^2 - u^2] = 0.5\, m\,[\,(\,v - u\,)\,(\,v + u\,)] \qquad 30.9$$

إذا عرفنا السرجهة المفقودة للجسم الساقط

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{v} - \mathbf{u} \qquad 31.9$$

فإن إسقاط هذه المعادلة على سالب المحور Oy، يعطي السرعة المفقودة

$$v = v + u \qquad 32.9$$

ولذلك يمكن كتابة الطاقة الحركية المفقودة، معادلة 30.9 بالصيغة الجديدة

$$\Delta T = \frac{m}{2}\,(v + u)^2 \left\{\frac{v - u}{v + u}\right\}$$

$$\Delta T = \frac{m}{2}\,(v + u)^2 \left\{\frac{1 - e}{1 + e}\right\} \qquad 33.9$$

نحسب الطاقة الحركية المفقودة لحالة التصادم بين جسمين، حركتهما انتقاليةٌ بحيث تكون سرجهتاهما قبيل التصادم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$ وبعيد التصادم $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ على التوالي، انظر **الشـكل 4.9**. طاقة حركة النظام (الجسمين) قبيل التصادم

[3] **لازار كارنو** L. Carnot's، 1753 -1823 عالمٌ فرنسي، برز في الرياضيات والميكانيكا بالإضافة إلى نشاطاته السياسية أيام الثورة الفرنسية.

$$T_v = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2$$

بينما طاقة حركته بعيد التصادم

$$T_u = \frac{m_1}{2} u_1^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2$$

وعلى هذا الأساس، فالطاقة المفقودة تحسب كالفرق بين الطاقتين

$$\Delta T = T_v - T_u = \frac{m_1}{2}\left[v_1^2 - u_1^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[v_2^2 - u_2^2\right] \qquad 34.9$$

وإذا ما عرفنا السرجهتين المفقودتين $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$، قياساً على المعادلة 31.9 وللجسمين المتصادمين 1 و 2 يكون

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \mathbf{u}_1 , \mathbf{V}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \mathbf{u}_2 \qquad 35.9$$

ومسقطاهما على خطِّ التصادم

$$V_1 = v_1 - u_1 , V_2 = v_2 - u_2 \qquad 36.9$$

فإنه قياساً على المعادلة 33.9 تكون الطاقة الحركية المفقودة للنظام المكون من الجسمين المتصادمين 1 و 2

$$\Delta T = \left\{\frac{m_1}{2}\left(v_1 - u_1\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(v_2 - u_2\right)^2\right\}\frac{1-e}{1+e} \qquad 37.9$$

وبالاستناد إلى المعادلتين 33.9 و 37.9 صاغ **كارنو** نظريته: **طاقة الحركة التي يفقدها الجسم، النظام المتصادم عند تصادمه المركزي المباشر تساوي $\frac{1-e}{1+e}$ من طاقة حركته فيما لو تحرك بسرعته المفقودة.** لاحظ أن المعادلتين 33.9 و 37.9 تعنيان أن طاقة حركة الجسم أو النظام تبقى ثابتة عند التصادم المرن التام $T = const$ لأن $e = 1$ و $\Delta T = 0$، بينما تساوي طاقة حركة الجسم أو النظام الطاقةَ الحركية المفقودة $T = \Delta T$ عند التصادم اللدن التام $e = 0$.

وسنحلل الحالتين الجديرتين بالاهتمام

1- كتلة الجسم الصادم تفوق كثيراً كتلة الجسم المصدوم $m_2/m_1 \cong 0$، نعتبر هنا أن $m_1 = m_1 + m_2$. طاقة الحركة المفقودة

$$\Delta T \cong 0 \quad \rightarrow \quad T_u = T_v$$

وعليه، فبالرغم من أن التصادم لدُن، إلا أنه لا يحدث فقدانٌ للطاقة الحركية عند التصادم. ويبدأ النظام الحركة بعيد التصادم بنفس طاقة الحركة تقريباً التي كانت له قبيل التصادم. ويتبدى هذا التصادم في الحياة العملية عند دق المسامير والأسافين في الجدران، إذ يجب أن تكون كتلة المطرقة أكبر بكثير من كتلة المسمار.

2 - كتلة الجسم المصدوم تفوق كثيراً كتلة الجسم الصادم $m_1/m_2 \cong 0$. فنعتبر في هذه الحالة أن $m_2 = m_1 + m_2$ وعليه فطاقة الحركة المفقودة

$$\Delta T \cong T_v \quad \rightarrow \quad T_u = T_v$$

أي أن الطاقة الحركية للنظام تستنفد لتشوه الجسم المصدوم. ويمكن اعتبار الجسمين المتصادمين ثابتين بعيد الصدمة. ولهذه الظاهرة أهميةٌ كبيرةٌ في الحياة العملية، فعند طرق الحديد يجب أن تكون كتلة السندان والنموذج أكبر بكثير من كتلة المطرقة.

لندرس حالةً خاصةً جداً للتصادم اللدن التام $e = 0$، بين جسمين الأول كان متحركاً بسرعةٍ v_1 نحو الثاني الذي كان ساكناً. نحسب الطاقة الحركية لهذا النظام قبيل التصادم وبعيده

$$T_v = \frac{m_1}{2} v_1^2 \qquad 38.9$$

$$T_u = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \qquad 39.9$$

ومن معامل الارتداد $e = 0$ ينتج أن

$$u_1 = u_2 \qquad 40.9$$

كما أن قانون حفظ الزخم للجسمين المتصادمين

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad 41.9$$

وباستبدال $u_2 = u_1$ وحل الناتج بدلالة u_1 يكون

$$u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad 42.9$$

وتبعاً لذلك تؤول الطاقة الحركة للنظام بعيد التصادم

$$T_u = \frac{m_1 + m_2}{2} u_1^2$$

وباستبدال u_1 من المعادلة 42.9 ينتج أن

$$T_u = \frac{m_1 + m_2}{2} \left\{ \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right\}^2$$

$$T_u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{m_1}{2} v_1^2 \qquad 43.9$$

كما أن استبدال $T_v = \frac{m_1}{2} v_1^2$ ، من المعادلة 38.9 ينتج أن

$$T_u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_v \qquad 44.9$$

أو بدلالة الطاقة الحركية المفقودة

$$\Delta T = T_v - T_u$$

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_v \qquad 45.9$$

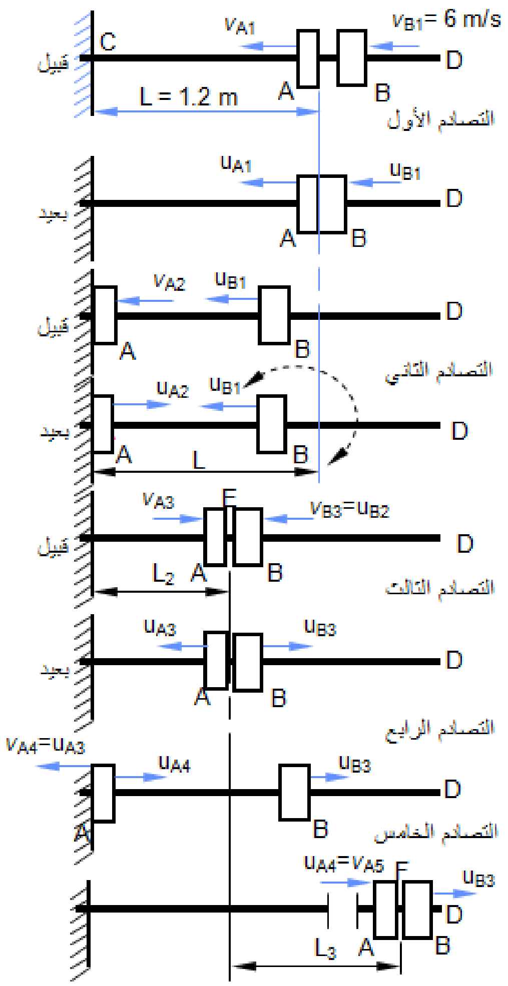
أسئلة محلولة

سؤال م 1.9

يتحرك المنزلق B على الدليل الأفقي والأملس CD، طوله الكلي 5 متر، بسرجهةٍ ابتدائية منتظمة قدرها $\boldsymbol{v}_B = -6\ [m/s]\ \boldsymbol{i}$، عندما صَدَمَ المنزلق الآخر A الساكن الحركة لحظتئذٍ. إذا كان التصادم مرناً e = 1 لجميع الحالات، أوجد عدد التصادمات التي تحدث (بين المنزلقين ومع الحائط) وما السرعة النهائية للمنزلق B وموضعه النهائي؟

اعتبر أن $m_B = 2$ [kg]، $m_A = 1$ [kg] و $L = 1.2$ [m].

الحل



شكل م 1.9

التصادم الأول

يحدث التصادم الأول بين المنزلقين A و B، $v_{A1}=0$ و $v_{B1}=6$[m/s]. من قانون حفظ زخم النظام المكون من المنزلقين لحظة التصادم، والمعادلة 1.10.9 وللاتجاه السالب يكون

$$m_A\, v_{A1} + m_B\, v_{B1} = m_A\, u_{A1} + m_B\, u_{B1}$$

$$1 \times 0 + 2 \times 6 = 1 \times u_{A1} + 2 \times u_{B1}$$

أو

$$u_{A1} + 2\, u_{B1} = 12 \qquad 1$$

معامل الارتداد، معادلة 19.9

$$e = \frac{u_{A1} - u_{B1}}{v_{B1} - v_{A1}}$$

وللتصادم مطلق المرونة، e=1 يكون

$$u_{A1} - u_{B1} = v_{B1} - v_{A1}$$

أو

$$u_{A1} - u_{B1} = 6 \qquad 2$$

وبحل المعادلتين 1 و 2 ينتج أن

$$u_{A1} = 8\ [m/s] \quad \& \quad u_{B1} = 2\ [m/s]$$

$$\mathbf{u}_{A1} = -8\ [m/s]\ \boldsymbol{i} \quad \& \quad \mathbf{u}_{B1} = -2\ [m/s]\ \boldsymbol{i}$$

التصادم الثاني

يحدث بين المنزلق A والحائط الجانبي

$$v_{A2} = u_{A1} = 8\ [m/s]$$

وللتصادم مطلق المرونة، يرتد المنزلق A نحو المنزلق B من الحائط بنفس سرعة ارتطامه بالحائط

$$e = \frac{u_{A2}}{v_{A2}} = 1 \quad \Rightarrow u_{A2} = v_{A2} = 8\ [m/s] \qquad 3$$

التصادم الثالث

يحدث بين المنزلقين A و B، نتيجة تلاقيهما للمرة الثانية، قبيل التصادم تكون v_{A3} = 8[m/s] وv_{B3} = v_{B2} =2[m/s]. نحسب السرعات بعيد التصادم من قانون حفظ الزخم وللاتجاه CD

$$m_A\, v_{A3} - m_B\, v_{B2} = - m_A\, u_{A3} + m_B\, u_{B2}$$

$$1\times 8 - 2\times 2 = - u_{A3} + 2\, u_{B3}$$

$$- u_{A3} + 2\, u_{B3} = 4 \qquad 4$$

معامل الارتداد يساوي الوَحْدَة

$$e = \frac{u_{B3} + u_{A3}}{v_{B3} + v_{A3}} \Rightarrow u_{A3} + u_{B3} = 10 \qquad 5$$

وبحل المعادلات 4 و5 نحصل على

$$u_{B3} = 14/3 \ [m/s] \ , \ u_{A3} = 16/3 \ [m/s] \ ,$$

إذا افترضنا أن المنزلقين ارتطما مع بعض في الموضع E، الذي بعده عن الحائط L_2 ، $5 > (L = 1.2) > L_2$. تحرك المنزلق A المسافة L، ثُمّ ارتد المسافة L_2 وصدم المنزلق B الذي قطع المسافة $L - L_2$. والمنزلقان A وB قطعا، وفي الوقت نفسه ، المسافتين $(L + L_2)$ و $(L - L_2)$ على الترتيب. إذن

$$t_1 = \frac{L+L_2}{u_{A1}} = \frac{L-L_2}{u_{B1}} \Rightarrow \frac{1.2+L_2}{8} = \frac{1.2-L_2}{2} \qquad 6$$

ومنها

$$L_2 = 0.72\ [m]$$

التصادم الرابع

يصدم المنزلق A الحائط بالسرعة $u_{A3} = v_{A4} = u_{A4} = 16/3$ [m/s] ، ثُمّ يرتد بنفس السرعة لليمين وذلك بنفس الأسلوب عند التصادم الثاني . لذلك فإن

$$u_{A4} = 16/3\ [m/s]$$

التصادم الخامس

نتأكد في البداية من أن المنزلق A يلحق بالمنزلق B على الدليل الأفقي الذي طوله لا يتجاوز 5 متر. إذا افترضنا أن ذلك يحدث على بعد L_3 من الموضع E ، وذلك في الموضع F، فإن القياس على المعادلة 6 يكون

$$t_2 = \frac{2L_2 + L_3}{v_{A4}} = \frac{L_3}{u_{B3}} \Rightarrow t_2 = \frac{2\times 0.72 + L_3}{16/3} = \frac{L_3}{14/3} \qquad 7$$

ومنها

$$L_3 = 10.08\ [m] > 5\ [m]$$

أي خارج حيز الدليل. لذلك لا يحدث تصادم خامس عل طول الدليل الأفقي. إذ يستمر المنزلقان في الحركة الأفقية حتى وصولهما لطرف الدليل البعيد D فيسقطان خارجاً تباعاً.

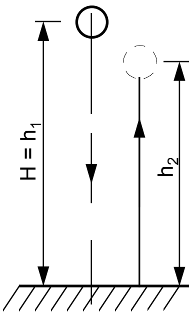
سـؤال م 2.9

تسقط كرة معدنية من الارتفاع H على مستوىً أفقي وأملس. ما الزمن اللازم لعددٍ لا محدود من الوثبات حتى تستقر الكرة على السطح كدالة الارتفاع H و معامل الارتداد e؟

الـحــــل

نحسب زمن السقوط من الارتفاع H، $H = h_1$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad 1$$



وبعد ارتطامها بالسطح الأفقي ترتد الكرة للأعلى لتصل للارتفاع h_2 خلال زمنٍ قدره

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \qquad 2$$

وحيث أن زمن الصعود t_2 للارتفاع h_2 من السطح يُساوي زمن السقوط من نفس الارتفاع لنفس السطح وبدون حساب تأثير قوةَ احتكاك الهواء، فإن الزمن المستنفد لصعود الكرة ورجوعها للسطح يساوي ضعف الزمن t_2 ، أي $2t_2$. وبشكل عام فإن الزمن الكلي المستنفد حتى استقرار الكرة على السطح

$$t = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + \cdots + 2t_n \qquad 3$$

شـكل م 2.9

ومن المعادلة 17.9 وللحالة العامة يكون

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}} = \sqrt{\frac{h_4}{h_3}} = \ldots\ldots\ldots = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}} \qquad 4$$

من جهةٍ أخرى، النسبة بين الزمنين t_2 و t_1 ، العلاقتان 2 و 1

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad \Rightarrow \; t_2 = e\,t_1 \;,\; t_3 = e\,t_2 = e^2\,t_1 \qquad 5$$

وبشكل عام

$$t_{n+1} = e^n\,t_1 \qquad 6$$

وباستبدال العلاقات 5 و 6 في المعادلة 3 يكون

$$t = t_1 + 2e\,t_1 + 2e^2\,t_1 + 2e^3\,t_1 + \cdots + 2e^n\,t_1 \qquad 7$$

وهذه تمثل متواليةً هندسيةً يتحدد مجموعها بالنهاية [4]

$$t = t_1\left\{1 + \frac{2e}{1-e}\right\} \qquad 8$$

وباستبدال قيمة t_1 من المعادلة 1 نجد ان الزمن اللازم حتى تستقر الكرة على السطح يبلغ

$$t = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad 9$$

---

[4] انظر مثلا

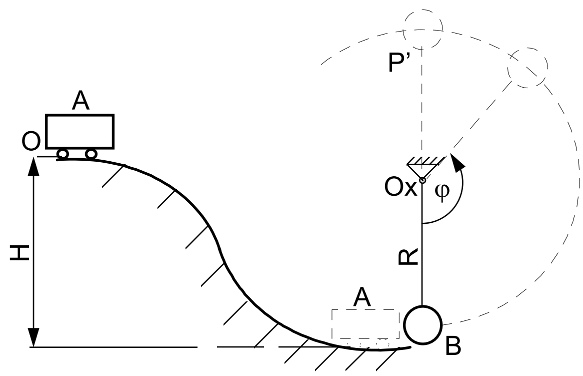
Goodman A.W.:Analytical Geometry and the Calculus. 4th ed. New York, Macmillan Publishing Co., Inc., 1974 . p 501.

سؤال م 3.9

تتحرك عربة، كتلتها M، من السكون على منحدرٍ، ارتفاعه H = 1.32 متر، باحتكاكٍ مهمل وتصدم بالكتلة الساكنة B، m = 1 كيلوغرام، والمربوطة بالخيط غير المرن OB، طوله R = 1.2 متر، وذلك عندما تصل العربة إلى أدنى مستوىً لها على المنحدر. إذا كان معامل الارتداد بين العربة والكتلة الساكنة e = 0.81، فما كتلة العربة حتى تستطيع الكتلة B بعيد الصدمة الدوران حول المحور الأفقي Ox دورةً واحدةً على الأقل؟

الحل

نحسب سرعة العربة لحظة وصولها لأدنى مستوى، النقطة B، وذلك من قانون تغير الطاقة الحركية، معادلة 24.5



شكل م 3.9

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 - 0 = MgH$$

$$v_A^2 = 2gH = 2\times 9.8 \times 1.32$$

$$v_A = 5.1 \text{ [m/s]} \qquad 1$$

ولصدمها الكتلة الساكنة B، تؤول سرعة العربة إلى u_A، بينما تنطلق الكتلة (نفسها) B بالسرعة u_B. ومن قانون حفظ زخم النظام المكون من الجسمين A و B أثناء الصدمة يكون

$$M v_A + m v_B = M u_A + m u_B$$

$$5.1 M + 0 = M u_A + 1\times u_B \Rightarrow \qquad 5.1 M = M u_A + u_B \qquad 2$$

ومن معامل الارتداد نجد المعادلة الثانية

$$e = \frac{u_B - u_A}{v_A - v_B} \quad \Rightarrow \quad 0.81 = \frac{u_B - u_A}{5.1 - 0}$$

$$u_B - u_A = 4.12 \qquad 3$$

المعادلتان 2 و 3 تحويان ثلاثةَ مجاهيل هي: السرعتان u_A و u_B مضافاً إليهما الكتلة M. ولذلك يتطلب الحل العام للمسألة معادلةً أخرى نستقيها من دوران الكتلة الساكنة حول محور الدوران Ox. فلدوران الكتلة B مع الخيط OB نصف دورةٍ، نحسب قيمة سرعتها v بدلالة موقعها، الزاوية φ، والشد في الخيط من معادلة الحركة في الاتجاه العمودي

$$m v^2 / R = T - m g \cos\varphi \qquad 4$$

حيث T الشد في الخيط. ومن قانون تغير الطاقة الحركية للكتلة B حتى وصولها للموقع φ

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m u_B^2 = A$$

$$v^2 - u_B^2 = -2 g R (1 - \cos\varphi)$$

$$v^2 = u_B^2 - 2gR(1-\cos\varphi) \qquad 5$$

وباستبدال v^2 في المعادلة 4 بقيمتها من المعادلة 5 وحل الناتج بدلالة الشد في الخيط T يكون

$$T = mg\left\{\frac{u_B^2}{gR} - 2 + 3\cos\varphi\right\} \qquad 6$$

وحتى لا يساوي الشد في الخيط في أيَّةِ نقطةٍ (ربما النقطة 'P ، $\varphi = \pi$) صفراً، فمن الضروري أن تكون $T_{min} \geq 0$. أي أن

$$u_{B\,min}^2 = gR\left[2 - 3\cos\varphi\right]\Big|_{\varphi=\pi} \Rightarrow u_B = u_{B\,min} = \sqrt{5\,gR}$$

$$u_B = 7.67\ [\,m/s\,] \qquad 7$$

نحسب سرعة العربة بعيد الصدمة بعد استبدال $u_B = 7.67$ في المعادلة 3

$$u_A = 3.55\ [\,m/s\,] \qquad 8$$

وأخيراً ، نحسب كتلة العربة بعد استبدال $u_A = 3.55[m/s]$ و $u_B = 6.67[m/s]$ في المعادلة 2

$$M = 5\ [kg] \qquad 9$$

تـــمـــريـــن: إذا غير الخيط إلى قضيبٍ عديم الوزن، فما مقدار الكتلة؟

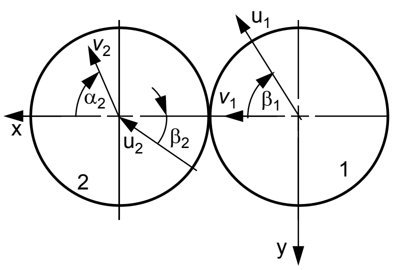
الجواب: 2.9 كيلوغرام.

ســـؤال م 4.9

في لحظةٍ ما تصدم كرة بيلياردو مُرتدةٍ من حافة الطاولة كرةً أخرى. احسب سرجهتي الكرتين بعيد التصادم للمعطيات التالية:

معامل الارتداد e = 0.82، v_1 = 20 متر / ثانية،

v_2 = 16 متر / ثانية و α_2 = 75°.



شـــكل م 4.9

الـــحـــل

هذا تطبيقٌ مباشر على التصادم المائل بين كرتين. معامل الارتداد، معادلة 19.9

$$e = \frac{u_2\cos\beta_2 - u_1\cos\beta_1}{v_1 - v_2\cos\alpha_2}$$

وباستبدال e = 0.82 ، v_1 = 20 متر / ثانية v_2 = 16 متر / ثانية و α_2 = 75°، نجد أن

$$u_2\cos\beta_2 - u_1\cos\beta_1 = 13 \qquad 1$$

ولإهمال الاحتكاك عند التصادم المائل، نستخدم قانون حفظ الزَّخَم للكرتين قبيل التصادم وبعيده ولوحدة الكتلة

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

ولاتجاه التصادم ***i***

$$v_1 + v_2\cos 75^o = u_1\cos\beta_1 + u_2\cos\beta_2 \qquad 2$$

بينما للاتجاه الرأسي $\boldsymbol{j}$

$$v_2 \cos 15^o = u_1 \sin\beta_1 + u_2 \sin\beta_2 \qquad 3$$

وباستبدال $e = 0.82$ ، $v_1 = 20$ متر / ثانية، $v_2 = 16$ متر / ثانية و $\alpha_2 = 75^o$، نجد أن

$$u_1 \cos \beta_1 + u_2 \cos \beta_2 = 24.14 \qquad 4$$

$$u_1 \sin\beta_1 + u_2 \sin\beta_2 = 15.455 \qquad 5$$

المعادلتان 4 و 5 تحويان ثلاثةَ مجاهيل هي: السرعتان u_1 و u_2 مضافاً إليهما الزاوية φ. ولذلك يتطلب الحل العام للمسألة معادلةً أخرى نستقيها من حقيقة أن الدفع الصادم $\mathbf{P}_{imp}$ موازٍ للسرجهة $\boldsymbol{v}_1$. وعليه فمن قانون تغير الزخم للكرة الصادمة 1 في الاتجاه العمودي على الحركة نجد أن

$$u_1 \sin\beta_1 - v_1 \cos 90^o = 0 \qquad 6$$

لنجد أن

$$\beta_1 = 0 \wedge \beta_1 = \pi \qquad 7$$

وبإلغاء $\beta_1=0$ لأن الكرة ترتد للخلف فعلياً فإن استبدال $\beta_1=\pi$ في المعادلات 1 ، 4 و 5 يكون

$$u_2 \cos \beta_2 + u_1 = 13 \qquad 8$$

$$u_2 \cos \beta_2 - u_1 \quad + = 24.14 \qquad 9$$

$$u_2 \sin \beta_2 = 15.455 \qquad 10$$

حلُّ هذه المعادلات 8 - 10 يبين أن

$$\beta_2 = 39.77^o, \qquad u_1 = - 5.57 \text{ [m/s]}, \quad u_2 = 24.16 \text{ [m/s]}$$

$$\mathbf{u}_1 = -5.57 \text{ [m/s]}, \quad \mathbf{u}_2 = 24.16 \text{ [m/s]}$$

أو

$$\mathbf{u}_1 = - 5.57\boldsymbol{i} \text{ [m/s]}, \ \& \ \mathbf{u}_2 = 24.16 \{\cos 39.77\, \boldsymbol{i} - \sin 39.77\, \boldsymbol{j}\} \text{ m/s}$$