الباب الثامن

ديناميكا النظام والجسم الجاسئ

DYNAMICS OF A SYSTEM AND RIGID BODY

1.8 مقدمة في ديناميكا النظام والجسم الجاسئ والقوى المؤثرة عليه

النظام هو فئةٌ مكونةٌ من اثنين أو أكثر من الأشياء المتفاعلة عادةً بعضها مع بعض كالنظام الشمسي، أو مجموعةٍ الأجزاء المكونة لجسمٍ صلب. ومن المفيد على حدٍ سواء، دراسة الأنظمة بصورةٍ عامةٍ ...... اعتبر فئةً من الجسيمات المتفاعلة، أي عددٍ من الجسيمات، والتي يعتمد موضع و/أو حركة كلّ جسيمٍ فيها على مواضع و/أو حركات جميع الجسيمات الأخرى، عندئذ ندعوها بالنظام الميكانيكي.

من جهة أخرى؛ تدعى مجموعة الجسيمات المادية، ذات العدد الثابت، والمحددة أبعادها بشكلٍ دقيق بالنظام المتميز أو المتقطع Discrete System. كما تدعى الجسيمات المرتبة بانتظامٍ في الفراغ، وذات عددٍ غير محدد، لا نهائي وأبعادها متغيرةً بالنظام المتصل Continuous System. وقد يُشكِّل النظام المتميز جسماً مادياً، لا تتغير أبعاده تحت تأثير القوى أياً كانت، ويسمى حينئذٍ بالجسم الجاسئ، أو تتغير أبعاده تحت تأثير القوى ويتشوه ميكانيكياً ليدعى بالجسم غير الجاسئ Nonrigid Body. والنظام الجاسئ هو النظام المكون من مجموعة أجسامٍ جاسئة، كما أن النظام غير الجاسئ هو النظام المكون من مجموعة أجسامٍ غير جاسئة. ولذلك؛ تعتبر الماكنات على اختلافها والسيارات والطائرات والصواريخ والمركبات الفضائية أجساماً جاسئة.

يمكن تقسيم القوى المؤثرة على نظامٍ ما أثناء حركته، أو حركة الجسيمات المكونة له إلى قوى داخلية وقوى خارجية كيفما تؤثر هذه القوى. فالقوى التي تؤثر بها جسيمات و/أو أجسام لا تدخل في تكوين النظام المعين، على جسيمات و/ أو أجسام النظام نفسه تعتبر قوى خارجية بالنسبة لهذا النظام. وعلى النقيض من ذلك، تعتبر القوى التي تؤثر بها جسيماتٌ و/أو أجسام من النظام على جسيمات و/أو أجسام أخرى من نفس النظام قوى داخلية. ولهذا فالقوة الخارجية قوة تؤثر على النظام أو على جسيمٍ فيه من خارجه، أمّا القوة الداخلية فهي قوة منشؤها وفعلها (سببها ومسببها)، كلاهما من داخل النظام قيد الدراسة. ومن الممكن طبعاً؛ أن تكون نفس القوة خارجية لنظامٍ ما وداخليةً لآخر. فمثلاً قوة جذب الشمس للأرض هي قوةٌ خارجيةٌ عند دراسة حركة الأرض كجسمٍ مفرد، أما في النظام المكون من الشمس والأرض فإن نفس القوة تعتبر قوة داخليةٌ. وعلى ذلك؛ يمكن تقسيم القوة (محصلة القوى **F**) المؤثرة على نظامٍ ما إلى جُزأين داخلي وخارجي

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{IN} + \mathbf{F}^{EX}$$

حيث إن IN و EX رموزٌ عُليا تُعَرِّف محصلتي القوى الداخلية والقوى الخارجية على الترتيب.

الخواص الرئيسية للقوى الداخلية

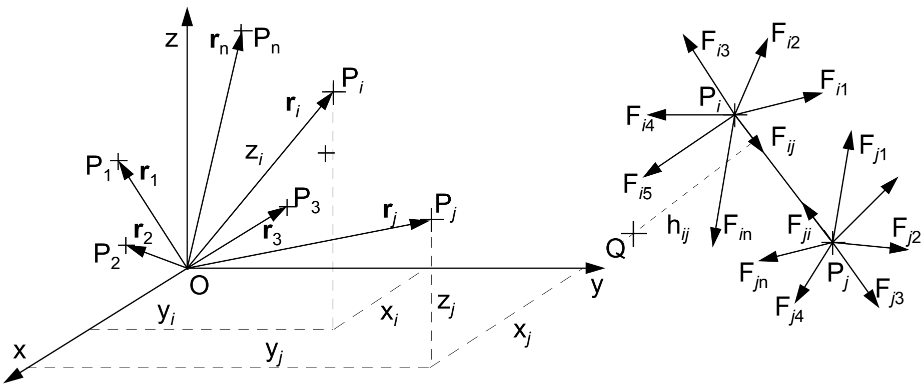
1- **المتَّجِهُ الرئيسي (المجموع الهندسي) لكل القوى الداخلية في أي نظامٍ يساوي الصفر.** أو رياضياً

$$\mathbf{F}^{IN} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{IN} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij} = 0 \qquad 1.8$$

حيث إن $\mathbf{F}^{IN}$ المتَّجِه الرئيسي لكل القوى الداخلية في النظامٍ، بينما $\mathbf{F}_{ij}$ ، $i \neq j$ قوة الفعل التي يؤثر بها الجسيم i على الجسيم j أو بالعكس. ولذلك فالجسيمان i و j من النظام المعين يؤثران بعضهما على بعض بالقوتين F_{ij} ، F_{ji}، المتكافئتين قيمةً والمضادتين اتجاهاً، **شكل 1.8**. ولهذا فمحصلتهما تساوي صفراً

$$\mathbf{F}_i^{IN} = \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \qquad 1.1.8$$

ولأن جميع القوى الداخلية ترد في أزواج متوازنة، ومجموع أيَّ زوجٍ من هذه القوى يساوي صفراً، فإن مجموع كلَّ هذه الأزواج يساوي صفراً أيضاً. وحيث إن الجسيمين i و j مختاران بشكلٍ اعتباطيّ، فإن محصلة كل القوى الداخلية تؤول للصفر، أي أن المعادلة 1.8 صحيحة تماماً.



شــكل 1.8

إن تعريف القوتين الداخلية والخارجية، مع قانون نيوتن الثالث يستلزم فوراً، **أن مجموع القوى الداخلية يجب أن يكون صفراً**. فلكل قوةٍ داخليةٍ قوةٌ مساويـــةٌ لها ومضادة. ولذلك فالرجل الذي يركب عربةً، يؤثر بقوة وزنه على العربة للأسفل، وتؤثر العربة بدورها بقوة رد الفعل، المساوية لوزن الرجل للأعلى. إن البحث في حركة الرجل وحده يجعل من قوة رد الفعل قوةً خارجيةً مؤثرةٍ على الرجل، بينما تعتبر (قوة رد الفعل) قوةً داخليةً عند بحث حركة النظام المكون من الرجل والعربة.

2- **العزم الرئيسي (مجموع العزوم الهندسي) لكل القوى الداخلية في النظام حول أية نقطة ثابتة أو محور ثابت يساوي صفراً**. ورياضياً؛ يكون عزم القوتين الداخليتين بين الجسيمين i و j حول نقطةٍ ما، Q مثلاً، مساوياً للصفر

$$\mathbf{M}_{Qi} = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} h_{ij}\, \mathbf{F}_i^{IN} = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} h_{ij}\,(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = 0 \qquad 2.8$$

وذلك لأن القوتين الداخليتين متساويتان ومتضادتان $\mathbf{F}_{ji}$=-$\mathbf{F}_{ij}$، **شـــكل 1.8** ومعادلة 1.1.8. وبالتالي فعزمهما حول أية نقطةٍ يتلاشى. ولأن i و j جسيمان مختاران بشكلٍ اعتباطي من جسيمات النظام، فإن عزم أي قوتي تفاعل $\mathbf{F}_{ij}$ و $\mathbf{F}_{ji}$، ولأي جسيمين من جسيمات النظام حول النقطة نفسها يساوي صفراً. إذ إن عزم أية قوةٍ حول نقطةٍ ما يتلاشـــى لوجود عزم قوةٍ أخرى مساوٍ ومضاد حول النقطة نفسها. وبالتالي فمجموع عزوم جميع القوى الداخلية في النظام حول النقطة نفسها يساوي صفراً. أي أن معادلة 2.8 صحيحةٌ أيضاً.

غير أنه، لا ينتج من الخاصتين المذكورتين أعلاه، أن القوى الداخلية التي توازن بعضها بعضاً لا تؤثر على حركة أجزاء النظام. بل تؤثر هذه القوى على جسيمات مادية مختلفة، يمكن أن تُسبب إزاحاتٍ متبادلةً لأذرعٍ وأجسامِ النظامِ نفسه. وتكون القوى الداخلية متوازنة التأثير عندما يكون النظام قيد الدراسة جسماً جاسئاً.

من ناحية أخرى؛ تُستغل بديهيات القيود عند بحث حركة النظام المقيد، بحيث يُدرس النظام المعين وكأنه تحرر من القيد، واستُبْدِل تأثير القيد بقوة رد فعله. وعليه يؤول النظام المقيد الحركة إلى نظام حر تحت تأثير القوى وردود الأفعال.

2.8 هندسة الكتل، الكتلة الكلية، مركز الكتلة

تعتمد حركة نظامٍ ما على كتلته الكلية، وتوزيع كتله المكونة له، علاوةً على القوى المؤثرة عليه. اعتبر فئةً من الجسيمات المتفاعلة، أي عدد من الجسيمات المكونة لنظام ما. دعنا نميزها، الجسيم 1 كتلته m_1، ومتَّجِه موضعه $\mathbf{r}_1$، وسرجهته $\boldsymbol{v}_1$، وهلُمَّ جَرَاً؛ كما نُسَمِّ متغيرات الجسيمات الأخرى بنفس الطريقة. ونُسَمِّ الكتلة الكلية للنظام M

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + \dots\dots\dots + m_n \qquad 3.8$$

والتي تســاوي المجموع الجبري لكتل جميع جســيمات النظام. بالإضافة إلى M، فإن الخاصية الهامة الأخرى هي مركز كتلة النظام الذي يُعرف بالعلاقة الاتجاهية

$$M\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}_i \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\mathbf{r}_i \qquad 4.8$$

حيث يُعَرَّف المقدار $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$ بالعزم الاستاتيكي لائتلاف كتـــل كل جسيـــمـــات النظام ومتَّجِهات مواضعها. ومتَّجِه موضع مركز الكتلة $\mathbf{r}_c$ هو المتوسط الموزون Weighted Average لمتجهات الموضع المفردة $\mathbf{r}_i$ لكلّ كتل النظام، بينما معاملات المتوسط الموزون هي $\frac{m_i}{M}$ ، i =1,2,3,.....,n، ومجموعها الجبري يساوي الوحدة $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} = 1$. وعلى ذلك؛ يمكن وصف مركز الكتلة بأنه الموضع المتوسط لكل الكتلة في النظام. وليس من الضروري بصورةٍ عامةٍ، أن يقع مركز كتلة النظام بأكمله عند أية نقطة في النظام، أو حتى يكون منطبقاً على مركز إحدى كتله.

ونســـــتطيع أحياناً أن نُخَمِّنَ بدقة مركز الكتلة دون اللجوء إلى المعادلة 4.8. فمركز كتلة قضيبٍ منتظمٍ مثلاً، يقع عند مركزه الهندسي، وكذلك الكرة والأسطوانة والمخروط وكل الأجسام المنتظمة. أما بالنسبة للأنظمة المركبة، فإحدى النتائج المفيدة، التي نذكرها دون برهان هي الآتية: إذا عُرِفَ مركز كتلة كل جزء من أجزاء نظام مركب، فإنه يمكن حساب مركز كتلة النظام برمَّتِه باعتبار أن كتلة كل جزءٍ تقع عند مركز كتلة ذلك الجزء، وذلك بالتطبيق المباشـــر للمعادلة الاتجاهية 4.8 أو المعادلات القياســـــية الثلاث المنبثقة عنها. إن ذلك يتطلب معرفة كتلة كل جزءٍ ومتَّجِه موضعه والكتلة الكلية للنظام. ولذلك ؛ فمركز كتلة النظام المكون من الأرض والقمر على ســـبيل المثال، يقع على بعد 4670 كيلو متراً من مركز الأرض[1].

وعندما يتحرك نظام جسيمات ما يتحرك مركز كتلته أيضاً. ومع أنه من الممكن أن يكون مركز الكتلة نقطة في المكان لا ارتباط لها بأية مادة، إلا أنها نقطةً محددةً تماماً ولها سرجهةٌ محددةٌ أيضاً. فمفاضلة المعادلة الأخيرة 4.8 يعطينا صيغةً لسرجهة مركز الكتلة

$$M\boldsymbol{v}_c = M\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \qquad 1.5.8$$

$$\boldsymbol{v}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} v_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \qquad 2.5.8$$

ومن الواضح أن سرجهة مركز الكتلة هي المتوسط الموزون لسرجهات الجسيمات المفردة. وبالمثل؛ فإن المتوسط الموزون لتسارعات الجسيمات المفردة يساوي تسارع مركز الكتلة

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_c \quad \Rightarrow \quad M\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} \qquad 6.8$$

ومن هنا يتضح أن موضع مركز كتلة النظام يعتمد على توزيع الكتل وأبـــعادهـــا فقط داخل النظام، وأن القوى المؤثرة على النظام ســـــواءً الداخلية أم الخارجية، لا تؤثر بتاتاً على موضع مركز كتلة النظام. إن مركز كتلة النظام أو حتى

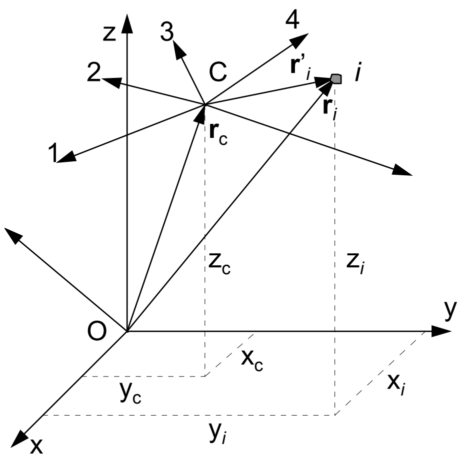
[1] انظر **الباب السادس**: **حركة الجسيم تحت تأثير القوة المركزية** وبالتحديد **جدول المعلومات الفلكية** عن كتلة الأرض والقمر وباقي الكواكب.

الجســم الجاســئ لا ينطبق بالضرورة على مركز ثقل النظام Center of Gravity، وهذا الأخير يمثل نقطة تمر خلالها محصلة قوى الجاذبية الأرضية (الوزن) وقوى القصور أثناء الدوران حول الأرض.

3.8 القوانين العامة لحركة النظام General Laws of Motion

1.3.8 المعادلة التفاضلية لحركة النظام

نفترض نظاماً ذا فئةٍ معينةٍ من الجسيمات الماديــة 1، 2، 3 ...، عددها n، وكتلها m_1، m_2، m_3....m_n، ومتَّجِهات مواضعها $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$ ، $\mathbf{r}_3$.....، $\mathbf{r}_n$ ، مقاسةً من مركز الإحداثيات الثابتــة Oxyz ، **شــكل 2.8**. ندرس حركة الجسيم i من هذه الفئة. تُــؤثر عليــه القوة الخارجية $\mathbf{F}_i$ ومجموعة القوى الداخليــة مــن الجســيمات الأخرى $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij}$.



شــكل 2.8

من قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم i نكتب معادلة حركته

$$m\,\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij} \qquad i, j = 1,2,3, \ldots\ldots, n\ ,\ j\neq i \qquad 7.8$$

كما يمكن كتابة هذه المعادلة الاتجاهية 7.8 لكل جسيمات النظام

$$m\,\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq 1}}^{n} \mathbf{F}_{1j}$$

$$m\,\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} \mathbf{F}_{2j} \qquad j = 1,2,3, \ldots\ldots, n\ ,\ j\neq i \qquad 8.8$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$m\,\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{n} \mathbf{F}_{nj}$$

والتي بجمعها حداً حداً نحصل على المعادلة (المعادلات) التفاضلية لحركة النظام بطريقة المجاميع الاتجاهية

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, a_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \qquad i = 1,2,3, \ldots\ldots, n \qquad 9.8$$

حيث تتلاشى محصلة مجاميع القوى الداخلية الناتج من المعادلات 8.8، انطلاقاً من الخاصية الأولى للقوى الداخلية، معادلة 1.8. ويمكن إسقاط مجموعة المعادلات السابقة 7.8 و 8.8 أو حتى المعادلات 9.8 على المحاور الديكارتية المتعامدة الثلاث، أو أية مجموعة محاور ثلاثية أخرى لنحصل على ثلاثة أضعاف عددها من

المعادلات. إن المسألة الأساسية في ديناميكا النظام هي تحديد معادلة (أو قانون) حركة كل جسيمٍ من جسيماته عند معرفة القوى المؤثرة عليه. أي بمعنى آخر إيجاد الإحداثيات x_i، y_i و z_i كدوالٍ زمنيةٍ. لكن، وبالأخذ بعين الاعتبار أن القوى الداخلية المؤثرة على جســـيمات النظام تكون في حالات كثيرة غير معروفةٍ، وأن عدد الجسيمات بالعادة يكون كبيراً، فإن حل 3n من المعادلات التفاضلية الناتجة من إسقاط أيٍ من المعادلات السابقة يصبح عديم الجدوى وغير منطقي. فحل 3n معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية كمعادلات المساقط الناتجة من معادلات 9.8 يدفعنا للبحث عن ضعف هذا العدد، أي 6n من الثوابت التكاملية والتي تتحدد مقاديرها من الشروط الابتدائية للحركة. ويُستعاض عن هذا النمط من المعادلات بمعرفة بعض خصائص حركة النظام بشكل عام، وليس حركة كل جسيم من جسيماته بشكل خاص. كما أن بالإمكان إيجاد خصائص حركة النظام من القوانين العامة لديناميكا النظام، والتي تعتبر بالأساس نتاجاً للمعادلة 7.8. ومن أهم هذه المعادلات- القوانين، معادلة حركة مركز كتلة النظام وقوانين زَّخَم النظام وقوانين الزَّخَم الزَّاوِّي للنظام، وأخيراً قانون تغير طاقة حركة النظام والتي سنوردها بقليل من التوسع تباعاً مع بعض التطبيقات.

4.8 حركة مركز كتلة النظام

1.4.8 معادلة حركة مركز كتلة النظام

سندرس حركة النظام المكون من n جسيم مادي، والذي تؤثر على كل جسيمٍ فيه مجموعة القوى الخارجية والداخلية كما ذكر في البند 1.8، **شــكل 2.8**. وباستبدال مجموع للقوى الخارجية المؤثرة على النظام بمحصلتها **F**، $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_c$، فإننا نستطيع كتابة المعادلة 9.8 بالشكل المقتضب التالي

$$M\,\mathbf{a}_c = \mathbf{F} \qquad 10.8$$

هذه المعادلة 10.8 تشــبه في صورتها الظاهرية حركة الجسيم المادي المفرد الذي كتلته M، وتؤثر عليه قوى تكافئ **F** ويتحرك بتسارعٍ $\mathbf{a}_c$. وعلى هذا الأساس يمكن صياغة معادلة حركة مركز كتلة النظام كالأتي: **يتحرك مركز كتل النظام كجسيم مادي، كتلته تساوي المجموع الجبري لكتل كل جسيماته، وتؤثر عليه قوة تكافئ المتجه الرئيسي لكل القوى الخارجية المؤثرة عليه.** كما يمكن تسمية نفس المعادلة بقانون نيوتن الثاني للنظام ككل : **المتجه الرئيسي لكل القوى الخارجية المؤثرة على النظام يُساوي حاصل ضرب الكتلة الكلية في تسارع مركز الكتلة.** ويمكننا التعبير عن هذه النتيجة الطريفة في بساطتها بصورةٍ أخرى: **يتحرك مركز الكتلة كما لو أن كل كتلة النظام قد تركزت هناك، وكما لو أن جميع القوى قد أثرت هناك أيضاً.** والمعادلة نفسها 10.8 تكافئ ثلاث معادلات قياسية

$$M\,a_{cx} = F_x\,,\ M\,a_{cy} = F_y\,,\ M\,a_{cz} = F_z \qquad 1.10.8$$

والتي تسمى بالمعادلات التفاضلية لحركة مركز كتلة النظام على محاور الإحداثيات الديكارتية. وتكمن أهمية معادلة حركة مركز كتلة النظام، معادلات 10.8 أو 1.10.8، أو حتى أي معادلات أخرى بما يلي:

1- يعطي القانون المذكور أسساً *واضحةً* ومحددةً لطرق دراسة ديناميكا النظام

2 - لا داعي لمعرفة القوى الداخلية المجهولة أصلاً، المؤثرة على جسيمات النظام.

2.4.8 قانون حفظ حركة مركز كتلة النظام

إذا أثرت على النظام، مجموعة القوى الخارجية، مجموعها الهندسي أثناء الحركة يساوي صفراً $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$، **شـــكل 2.8**، فإن المعادلة 10.8 تصبح

$$M\,\mathbf{a}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_c = \text{const.} \qquad 11.8$$

وهذه تمثل قانون حفظ حركة مركز كتلة النظام: **إذا كان المجموع الهندسي لكل القوى الخارجية المؤثرة على نظام ما مساوياً للصفر، فإن مركز كتلة هذا النظام يتحرك حركةً منتظمةً وفي خطٍ مستقيم، أي يتحرك مركز الكتلة بسرجهة ثابتة مقداراً واتجاهاً**. وبشكلٍ خاص؛ إذا كان مركز الكتلة في البداية ساكناً، فإنه يظل كذلك. وكما هو ملاحظ لا يمكن للقوى الداخلية أن تُغير حركة مركز كتلة النظام.

من جهة أخرى، إذا كان المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام لا يســاوي صفراً، لكن مســقطها على محورٍ ما، Ox مثلاً، يساوي صفراً، فإن مسقط المعادلة 11.8 على المحور المذكور يأخذ الصورة

$$M\,a_{cx} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{cx} = \text{const.} \qquad 1.11.8$$

أي إذا كان مسقط المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على نظام ما على أحد المحاور مساويـــاً للصفر، فإن مسقط سرعـــة مركز كتلة النظام على المحور المذكور يكون مقداراً ثابتاً، أي أن مركز كتلة النظام سيتحرك حركةً مـــنتظمةً على هذا المحور. وفي حالاتٍ خاصة ، إذا كانت سرعة مركز كتلة النظام على محورٍ ما، Ox مثلاً، في اللحظة الابتدائية صفراً، $v_{cxo} = 0$، فإن مركز كتلة النظام سيبقى ساكناً بالنسبة إلى ذلك المحور.

5.8 زخـــم الـــنـــظـــام

يعرف زخم النظام بالكمية المتجهة **K** التي تساوي المجموع الهندسي لزِخَامِ كل جسيماته المكونة له

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{v}_i \qquad 12.8$$

وبناءً على المعادلة 2.5.8، يمكن استبدال المجموع الأخير في المعادلة 12.8 بحيث تصبح

$$\mathbf{K} = M\,\boldsymbol{v}_c \qquad 13.8$$

أي أن **زخم النظام يساوي حاصل ضرب كتلته الكلية M في سرجهة مركزها $\boldsymbol{v}_c$**. وهو كميةٌ متجهةٌ يكون اتجاهها بنفس اتجاه سرجهة مركز الكتلة.

ويتضح من المعادلة 13.8، أنه إذا تحرك نظام الجسيمات بحيث يبقى مركز كتلته ثابتاً لا يتغير، فإن زخمه الرئيسي يساوي صفراً **K=0**. وعلى سبيل المثال يكون زخم الجسم الدائر حول محور دورانٍ اعتباطيٍ ثابت ويمر بمركز كتلته مساوياً للصفر. أما إذا كانت حركة النظام مركبةً، مستويةً مثلاً، فإن زخمه الرئيسي لا يحدد جزء الحركة الدوراني حول المحور المار بمركز الكتلة، بل جزء الحركة الانتقالي للنظام أو الجسم الجاسئ.

1.5.8 قانون تغير زخم النظام

المشتقة الأولى لطرفي المعادلة 13.8

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\frac{d(M\boldsymbol{v}_c)}{dt}=M\frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt}=M\ \mathbf{a}_c$$

فالطرف الأيمن هو حاصل ضرب الكتلة وتسارع مركز الكتلة الذي يساوي - حسب قانون نيوتن الثاني - المتجه الرئيسي للقوى المؤثرة على النظام. وعلى ذلك يمكن استبدال المعادلة السابقة بالعلاقة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\mathbf{F} \qquad 14.8$$

التي تعبر عن قانون تغير الزخم للنظام بصورة تفاضلية: **المشتقة الأولى لزخم النظام تساوي المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة عليه.** كما ويمكن صياغة قانون تغير الزخم للأنظمة بطريقة أخرى. فإذا كان زخم النظام الرئيسي في اللحظتين الابتدائية $t_0=0$ والنهائية t، $\mathbf{K}_o$ و $\mathbf{K}$ بالترتيب، عندئذ بضرب طرفي المعادلة 14.8 في dt، ثم إجراء التكامل المطلوب بين اللحظتين المذكورتين، نجد أن

$$\mathbf{K}-\mathbf{K}_o=\int_0^t \mathbf{F}\cdot dt=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathbf{F}_i\ dt$$

أو بدلالة الدفع الرئيسي لمجموعة القوى الخارجية المؤثرة التي زُوِّدَ به النظام P

$$\mathbf{K}-\mathbf{K}_o=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i=\mathbf{P} \qquad 15.8$$

والذي يساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة الذي زود به النظام خلال تلك الفترة الزمنية المحددة. وتعبر المعادلة 15.8 عن قانون تغير الزخم للأنظمة بصورة تكاملية: **التغير في زخم النظام خلال فترة زمنية محددة يساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة الذي زود به النظام خلال فتـــرة زمنية محددة،** ويساوي **الدفع الرئيسي للقوة F الذي زود به النظام خلال الفترة الزمنية نفسها**، معادلة 10.8.

إن النظر إلى معادلة حركة مركز كتلة النظام، معادلة 10.8، أو قانون تَغَيُّرِ الزَّخَم، معادلات 14.8 و15.8، يبين لنا صورتين مختلفتين لقانونٍ واحد. إن استخدام أيٍّ من هاتين الصورتين لتعريف حركة الجسم الجاسئ، أو حتى النظام يعطي نتائج مثلى، وإن كان استخدام المعادلة 10.8 أكثر سهولةً ويسرا. أما في الحالات التي يكون فيها النظام وسطاً متصلاً كالموائع - السوائل والغازات أو حتى الأجسام متغيرة الكتلة، فإن استخدام معادلة حركة مركز الكتلة يصبح عديم المعنى والجدوى، ويستخدم بدلاً منه لحل هذه المسائل قانون تغير الزخم للنظام، معادلات 14.8 و 15.8.

2.5.8 قانون حفظ زخم النظام

يتغير الزخم الكلي لنظامٍ ما استجابةً للقوى الخارجية المؤثرة على النظام. وينتج عن ذلك أنه في حالة انعدام القوى الخارجية، وَوَفقاً للمعادلة 14.8، يكون زخم النظام الرئيسي ثابتاً

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=0 \ \Rightarrow \ \mathbf{K}-\mathbf{K}_o=0 \qquad 16.8$$

وتكمن أهمية حفظ الزخم والذي يبدو متشابهاً مع قانون نيوتن الأول لنظامٍ ما إذا اعتبرنا أجزاء النظام المفردة

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \ldots\ldots\ldots\ \mathbf{K}_n \qquad 1.16.8$$

فيمكن لأي زخمٍ أن يتغير بمفرده مع الزمن؛ إلا أن مجموع هذه الزِّخَام يكون محفوظاً، إذا كان النظام حراً من تأثير أيَّةِ قوةٍ خارجية. لاحظ أننا نتعامل مع مجموع اتجاهي، ولذلك فالزخم الرئيسي للنظام يكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً.

إذا كان المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام أثناء حركته لا يساوي صفراً، ولكن مسقطه على أحد المحاور، Ox مثلاً، يساوي صفراً، فإننا نستنتج من مسقط المعادلة 14.8 على المحور المذكور أن مسقط زخم النظام يساوي مقداراً ثابتاً

$$\frac{dk_x}{dt} = F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$K_x - K_{xo} = \text{const.} \qquad 2.16.8$$

وعليه فسرعة مركز كتلة النظام على المحور المذكور تكون ثابتة. أي أن مركز كتلة النظام يتحرك حركةً منتظمةً باتجاه ذلك المحور، أو يبقى ساكناً إذا كانت السرعة الابتدائية صفراً. ويمكن الاستنتاج من قانون حفظ زخم النظام، المعادلات 16.8، أن القوى الداخلية غير قادرةٍ على تغيير زخم النظام. ولذلك سنعرض لبعض الأمثلة التطبيقية على ثبات الزخم للأنظمة

1- **ظاهرة الارتداد في البندقية عند إطلاقها الرصاصة**: تكتسب الرصاصة لحظة إطلاقها زخماً معيناً لدفعها خارج البندقية. وفي الوقت نفسه تكتسب البندقيةُ زَخَماً آخر مساوياً للزَّخَمِ الأول في المقدار ومضاداً له في الاتجاه، وهذا يسبب الحركة العكسية في البندقية، أو ما يعرف بحركة الارتداد للخلف.

2- **الحركة النفاثة في الصواريخ**: يندفع الغاز المحترق بسرعةٍ كبيرةٍ جداً من فوهة المحرك النفاث الخلفية. زخم الغازات المندفعة للخلف يقابله زخمٌ مساوٍ له في المقدار ومضاد له بالاتجاه يدفع الصاروخ للأمام ولهذا تزداد سرعته. وهذا ما سندرسه في البند التالي 3.5.8.

حـــل الـــمـــســـائـــل

يقوم حل مسائل وتمارين ديناميكا النظام على تحديد القانون أو المعادلة الذي يجب استخدامه للحالة المعينة. فبواسطة المعادلات التي تحكم هندسة الكتل 3.8 - 6.8، يمكن حساب سرجهات وتسارعات عناصر(جسيمات) النظام، بما فيها مركز الكتلة. وإذا أضفنا إلى ذلك قانوني نيوتن الثاني للنظام، معادلة 10.8، وحفظ الزخم للنظام، معادلة 11.8، فإن ذلك يمكننا من حل التمارين التي تربط بين الإزاحة، القوة والسرجهة. وبالعادة تؤخذ الشروط الابتدائية للحركة بعين الاعتبار. فتلاشي القوة في اتجاهٍ ما، مثلاً، مع شروطٍ ابتدائيةٍ معينةٍ، يمكننا من حساب إزاحة مركز الكتلة أو أحد جسيمات النظام.

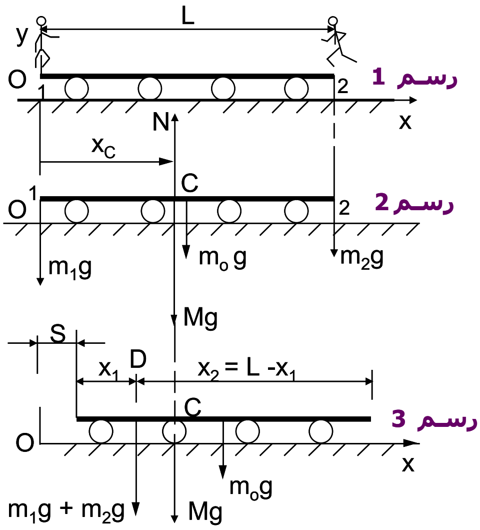
وكما الحال في الباب الخامس، فبواسطة قوانين الزخم للنظام، تغير الزخم، المعادلات 14.8 - 15.8 وحفظ الزخم، معادلة 16.8، تُحل المسائل والتمارين التي تربط بين القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية لمركز الكتلة.

أسـئــلـــةٌ مــحـــلــولـــة

ســـؤال م 1.8

على طرفي عربة طويلةً نسبياً طولها L وكتلتها m_o، يوجد شخصان كتلتاهما m_1 و m_2. إذا تحرك الشخص الأول ببطء نحو الشخص الثاني، الذي عمل ذلك مهرولاً. أوجد بإهمال الاحتكاك إزاحة العربة وسرعتها بدلالة إزاحة الشخص لأول x_1 عندما يلتقيان على سطح العربة.

الـــحـــل



شـــكل م 1.8

تؤثر على النظام المكون من العربة والشخصين أوزانهما $m_o\mathbf{g}$، $m_1\mathbf{g}$ و $m_2\mathbf{g}$ بالإضافة لرد فعل الطريق على العربة **N**. وحيث إن كلاً من هذه القوى تؤثر عمودياً على الحركة الأفقية والوحيدة لهذا النظام، فإن مركبة القوى الأفقية تساوي صفراً، $F_x = 0$. وعليه فمن قانون حفظ حركة مركز كتلة النظام، المعادلة 1.118 ، يكون

$$M\dot{x}_c = \text{const.} \qquad 1$$

ولأن النظام كان ساكناً لحظة بداية الحركة ، $\dot{x}_{Co} = 0$ ، فإن هذا يعني

$$M\dot{x}_c = 0 \Rightarrow \quad M\,x_C = \text{const.} \qquad 2$$

أي يبقى بعد مركز كتلة النظام ثابتاً. إذا افترضنا أن x_1 المسافة التي يقطعها الشخص الأول، وx_2 المسافة التي يقطعها لشخص الثاني على سطح العربة. إزاحة العربة لليمين بالمقدار S، كما في **رســـم 2**، تبين أن إزاحة الشخص الأول المطلقة بالنسبة إلى النقطة الثابتة O تبلغ $S+x_1$، وتبلغ إزاحة الشخص الثاني المطلقة المقدار $S-x_2$ بالنسبة لنفس النقطة O. وباستبدال هذه الإزاحات في المعادلة 4.8 وللاتجاه ***i*** يكون

$$(m_o + m_1 + m_2)\,x_C = m_o\,S + m_1\,(S + x_1) + m_2\,(S - x_2) \qquad 3$$

لكن، عندما يلتقي الشخصان في النقطة D، **رســـم 3**، يكون

$$x_2 = L - x_1 \qquad 4$$

حلُّ المعادلتين الأخيرتين 3 و 4 يبين أن الإزاحة الكلية للعربة عن الموضع الابتدائي

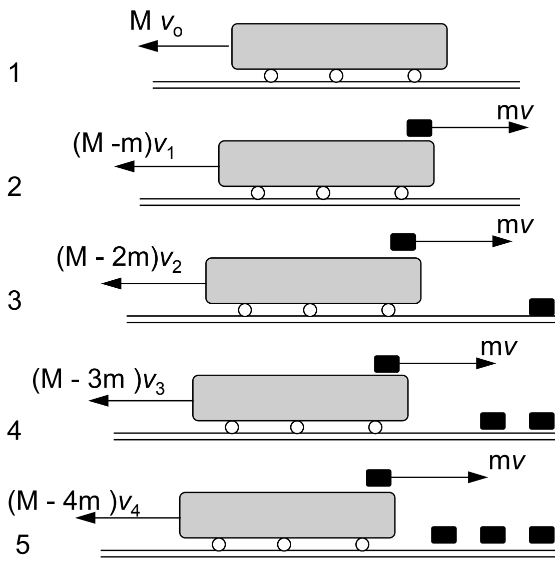
$$S = x_C + \frac{(m_1 + m_2)\,x_1 - m_2\,L}{m_o + m_1 + m_2} \qquad 5$$

بينما تتحدد سرعة العربة كمشتقة المسافة S

سـؤال م 2.8

تتحرك عربةٌ منزلقةٌ على سكة حديدٍ أفقيةٍ بسرعةٍ ثابتة، مقدارها 4.6 متر / ثانية. يقذف رجلٌ واقفٌ على العربة أكياساً من الرمل كيساً كيساً بسرعة قذفٍ للخلف مقدارها 1 متر/ثانية بالنسبة للعربة. بعد كم كيسٍ يقذفه الرجل إلى الأرض حتى تتعدى سرعة العربة الحدَّ 5 متر/ثانية. كتلة كيس الرمل 40 كيلوغرام وكتلة العربة الأولية مع الرجل 2000 كيلوغرام.

الـــحـــل



شـكل م 2.8

سنحل هذا السؤال باستخدام قانون حفظ الزخم، معادله 16.8 وللاتجاه ***i***

$$K_i - K_{io} = 0 \tag{1}$$

لأن محصلة القوى المؤثرة على النظام بالاتجاه المذكور تساوي صفراً. إذ يُمثِّل الرمز i عدد الأكياس المقذوفة، وهو يُعَبِّر عن حالة العربة. زخم النظام في اللحظة الابتدائية، i =1، يساوي حاصل ضرب كتلة (النظام) العربة في السرعة الابتدائية v_o

$$K_{1o} = M\, v_o \tag{2}$$

بينما زخم النظام بعيد قذف أول كيس رملٍ فيبلغ

$$K_1 = (M - m)\, v_1 - m\, v \tag{3}$$

حيث M كتلة العربة الإجمالية و m كتلة كيس الرمل، v_1 سرعة العربة بُعَيْدَ قَذْفِ أوّل كيسِ رملٍ بسرعة نسبيةٍ للعربة v، **رســم 2**. وبتعويض العلاقات 2 و 3 في المعادلة 1 يكون

$$(M - m)\, v_1 - m\, v - M\, v_o = 0$$

والتي يبين حلُّها بدلالة v_1

$$v_1 = \frac{m}{M-m}v + \frac{M}{M-m}v_o \tag{4}$$

وباستبدال القيم v_o = 4.6 متر/ثانية، M = 2000 كيلوغرام، m = 40 كيلوغرام، v = 1 متر / ثانية، نحصل على سرعة العربة بُعَيْدَ قذف أول كيس رمل منها

$$v_1 = 4.714\ [m/s]$$

بعد انطلاق العربة بالسرعة v_1 ، يقذف الرجل الكيس الثاني من مؤخرة العربة بسرعةٍ نسبيةٍ مقدارها v، فتكتسب العربة دفعاً للأمام يجعلها تنطلق بالسرعة الجديدة v_2، **رســم 3**. زخم النظام (العربة) قياساً على العلاقة1، i = 2

$$K_{2o} = (M - m)\, v_1 \tag{5}$$

حيث أصبحت كتلة العربة بعد رمي الكيس الأول (M - m). زخم النظام بعيد قذف الكيس الثاني

$$K_2 = (M - 2m)\, v_2 - m\, v \tag{6}$$

لأن كتلة العربة بعد رمي الكيس الثاني (M - 2 m). وبتعويض العلاقات5 و 6 في المعادلة 1 يكون

$$(M - 2m)\, v_2 - m\, v - (M - m)\, v_1 = 0$$

لنجد أن سرعة العربة

$$v_2 = \frac{m}{M-2m}v + \frac{M-m}{M-2m}v_1 \qquad 7$$

وباستبدال القيم كما وردت أعلاه نحصل على السرعة

v_2 = 4.833 [m/s]

وعلى نفس المنوال، نحصل على سرعة العربة بعيد قذفِ الكيس الثالث ثم الرابع

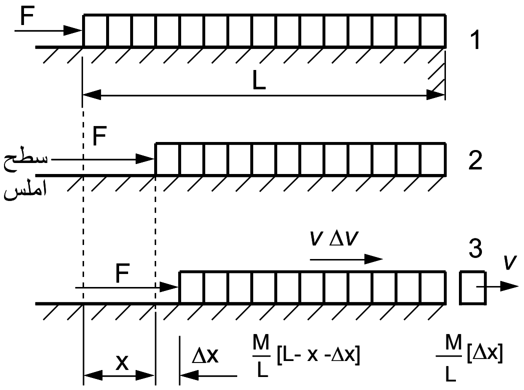
v_3 = 4.957 [m/s] , v_4 = 5.087 [m/s]

أي أن سرعة العربة تتعدى 5 متر / ثانية بعيد رمي الكيس الرابع.

ســؤال م 3.8

عدد كبيرٌ جداً من الصناديق المنتظمة والمتلاصقة بعضها مع بعض، كانت مستقرةً على سطحٍ أفقيٍ وأملس عندما بدأ تــأثير القوة الثابتة **F** كقوة دفعٍ للصندوق الأخير. فتدافعت الصناديق على السطح الأفقي، ثم بدأت بالسقوط المتتــالي مــن الجهــة الأخرى.

أوجد سرعة الصندوق الأخير (الصناديق المتبقية) على السطح عند سقوط 0.9 الصناديق. طول الصناديق مجتمعةً يساوي L، بينما كتلة جميع الصناديق M.



شـكل م 3.8

الـحــــل

تَدْفَعُ القوةٌ الثابتة F الصناديق مجتمعةً، فيسقط الأول، الأبعد عن نقطة تأثير القوة ثم يليه الثاني والثالث وهكذا دواليك. وحيث إن القوة ثابتةُ والكتلة الكلية للصناديق المتبقية على السطح تتناقص فإن سرعة وتسارع الصناديق المتبقية سيزدادان بالتأكيد.

نفترض أن عدداً من الصناديق بطول x سقط من فوق السطح بسبب الحركة الناتجة من تأثير قوة الدفع F لليمين. كتلة الجزء المتبقي على السطح الأفقي M (L - x) / L، ويتحرك بسرعةٍ v، وبالتالي يُكافئ زخمه العلاقة

$$K_o = \frac{M}{L}(L-x)v \qquad 1$$

وإذا تخيلنا، من جديد ، سقوط عددٍ آخرَ صغيرٍ جداً من الصناديق طوله Δx، حيث كانت سرعته الأفقية قبل السقوط v، فإن سرعة الجزء المتبقي الذي طوله على السطح الأفقي(L-x-Δx) ستزداد بالمقدار Δv، أي تصبح ($v+\Delta v$)، **رسـم 3**. تتكون كتلة النظام في الحالة الثانية من كتلة الجزء المتبقي على السطح M(L-x-Δx)/L الذي أصبحت سرعته($v+\Delta v$)، وكتلة الجزء الصغير جداً الذي سقط M(Δx)/L حيث كانت سرعته v. وبالتالي فزخم النظام في الحالة الثانية

$$K_1 = \frac{M}{L}(L-x-\Delta x)(v+\Delta v) + \frac{M}{L}(\Delta x)(v) \qquad 2$$

وباستخدام قانون تغير الزخم، معادلة 15.8 للفترة المحدودة Δt بين الوضعين 0 و 1 وللاتجاه ***i*** يكون

$$K_1 - K_o = F_t \Delta t \qquad 3$$

حيث أن F_t محصلة القوى المؤثرة على النظام (الصناديق) بالاتجاه ***i*** ، $F_t = F$. وبتعويض العلاقات 1 و 2 في المعادلة 3 نحصل على المعادلة التالية

$$\frac{M}{L}\left[(L-x-\Delta x)(v+\Delta v)+(\Delta x)v-(L-x)v\right]=F\Delta t$$

وباختصار $\Delta x\ \Delta v \cong 0$ من الناتج نحصل بعد قسمة الطرفين على Δt على دالة القوة

$$F=\frac{M}{L}(L-x)\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad 4$$

أو كصيغة نهاية

$$F=\frac{M}{L}(L-x)\frac{dv}{dt} \qquad 5$$

وإذا استبدلنا $\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ ، في المعادلة 5، فإننا نحصل بعد ترتيبها على

$$\frac{FL}{M}\frac{dx}{L-x}=vdv \qquad 6$$

أو بعد إجراء التكامل

$$v^2=-\frac{2FL}{M}\ln(L-x)+\ln C \qquad 7$$

حيث أن C ثابتٌ نجد قيمته من الشروط الابتدائية $v_o=0$ عندما كانت x=0، ولنجد أن سرعة الصناديق المتبقية

$$v=\sqrt{\frac{2FL}{M}\ln\frac{L}{L-x}} \qquad 8$$

سقوط 0.9 الصناديق يعني أن x = 9 L / 10، وبالتالي فالسرعة عندئذ

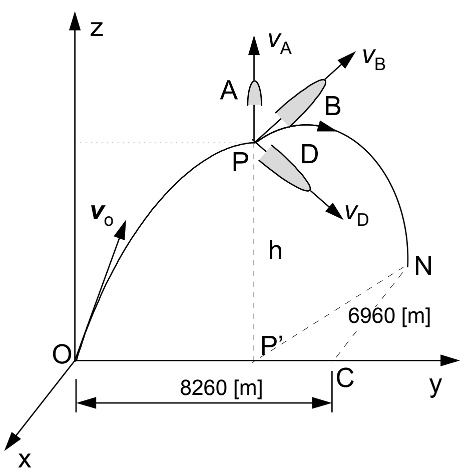
$$v=\sqrt{\frac{2FL}{M}\ln 10} \qquad 9$$

سؤال م 4.8

انطلقت قذيفة مدفعٍ، كتلتها 25 كيلوغرام في المستوى العمودي Oyz بالسرجهة

$$\boldsymbol{v}_o = 192\,\boldsymbol{j} + 256\,\boldsymbol{k}\ [m/s]$$

إذا علمنا أن القذيفة انفجرت عند أقصى ارتفاع وصلته إلى ثلاث شظايا A، B و D، كتلها 6.5 كيلوغرام، 11 كيلوغرام و 7.5 كيلوغرام على الترتيب. وكانت حركة الشظايا بالشكل التالي: الشظية A ارتفعت عموديا للأعلى المسافة 490 متراً، والشظية B انطلقت أفقياً من موقع الانفجار لترتطم في موقعٍ إحداثياته على سطح الأرض بالأمتار N(-6960, 8260, 0). أوجد سرجهة الشظية الثالثة D بعيد الانفجار.



شكل م 4.8

الـــحـــل

من معادلات حركة المقذوفات نحدد أقصى ارتفاعٍ تصله القذيفة بعد إطلاقها

$$PP' = h = \frac{v_{oz}^2}{2g} = \frac{256^2}{2 \times 9.8} \Rightarrow PP' = 3340 \text{ [m]} \qquad 1$$

أما الزمن الذي تستغرقه القذيفة لوصولها إلى هذا الارتفاع

$$t = \frac{v_{oz}}{g} = \frac{256}{9.8} \Rightarrow t = 26.12 \text{ [s]} \qquad 2$$

وتبعاً لذلك، نحدِّد البعدين P'C و P'N

$$OP' = v_{ox} \times t = 192 \times 26.12 \Rightarrow OP' = 5015 \text{ [m]}$$

$$P'C = OC - OP' = 8260 - 5015 \Rightarrow P'C = 3245 \text{ [m]}$$

$$P'N = \sqrt{\overline{P'C}^2 + \overline{CN}^2} = \sqrt{3245^2 + 6960^2} = 7680 \text{ [m]}$$

زمن وصول الشظية B للأرض هو الزمن الذي تستغرقه القذيفة لوصولها إلى الارتفاع الأقصى PP'=h ، أي أنَّ t= 26.12 [s]. وعلى هذا الأساس

$$v_B = P'N / t = 7680 / 26.12 = 294 \text{ [m/s]}$$

$$\boldsymbol{v}_B = -266.43\,\boldsymbol{i} + 124.22\,\boldsymbol{j} \text{ [m/s]} \qquad 3$$

سرعة الشظية A لحظة الانفجار

$$v_A = \sqrt{2\,g\,h_A} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 490} = 98 \text{ [m/s]}$$

$$\boldsymbol{v}_A = 98 \text{ [m/s] } \boldsymbol{k} \qquad 4$$

وحتى نحدد سرجهة الشظية الثالثة D نستخدم قانون حفظ الزخم للنظام، معادلة 16.8، حيث لا تؤثر أيَّةَ قوةٍ خارجيةٍ على النظام، إذ تعتبر قوة الانفجار قوة داخلية

$$\boldsymbol{K} = M\,\boldsymbol{v}_C = \text{const.} \qquad 5$$

حيث $\boldsymbol{v}_C$ سرجهة القذيفة قُبيل انشطارِها. ولأنَّ القذيفة لحظة انفجارها كانت تتحرك أفقياً وبالاتجاه $\boldsymbol{j}$، فإن سرجهتها، $\boldsymbol{v}_C = 192 \text{[m/s]}\,\boldsymbol{j}$

$$M\,\boldsymbol{v}_C = m_A\,\boldsymbol{v}_A + m_B\,\boldsymbol{v}_B + m_D\,\boldsymbol{v}_D$$

$$25 \times 192\,\boldsymbol{j} = 6.5 \times 98\,\boldsymbol{k} + 11 \times (-266.43\,\boldsymbol{i} + 124.22\,\boldsymbol{j}) + 7.5\,\boldsymbol{v}_D \qquad 6$$

وبحل المعادلة 6 نحصل على مركبات السرجهة $\boldsymbol{v}_D$

$$\boldsymbol{v}_D = 390.076\,\boldsymbol{i} + 457.81\,\boldsymbol{j} - 84.93\,\boldsymbol{k} \text{ [m/s]} \qquad 7$$

بينما مقدار السرعة

$$v_D = \sqrt{390.76^2 + 457.81^2 + 84.93^2} = 607.86 \text{ [m / s]} \qquad 8$$

سـؤال م 5.8

بينما تنزلق عربة بالقصور أفقياً بالسرجهة v_o، يتحرك عليها حامل متحرك بسرعة نسبية مقدارها **u**. ما السرعة المشتركة v للعربة والحامل بعد توقف الحامل المفرمل؟ إذا كانت كتلة العربة m_o وكتلة الحامل m في الحالتين التاليتين:

1- حركتا العربة والحامل بنفس الاتجاه.

2- حركتا العربة والحامل متضادتان.

الحـــل

1- حركتا العربة والحامل بنفس الاتجاه. عندئذٍ يكون زخم النظام المكون من العربة والحامل في اللحظة الابتدائية

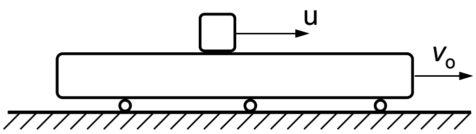
$$\mathbf{K}_o = \{ m_o v_o + m (v_o+u)\}\, \boldsymbol{i} \qquad 1$$

بينما زخم النظام لحظة توقف الحامل على سطح العربة (يصبح الحامل لحظتها جزءً من العربة ويتحرك بنفس سرجتها)

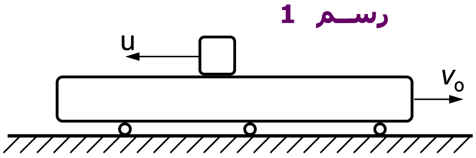
$$\mathbf{K} = \{ (m + m_o) v \}\, \boldsymbol{i} \qquad 2$$

وحيث لا تُؤثر أية قوة باتجاه الحركة $\boldsymbol{i}$ ، (تعتبر قوة الاحتكاك قوةً داخلية) فإن قانون حفظ الزخم، معادلة 16.8

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{K} \Rightarrow \{m_o v_o +m (v_o + u)\}\, \boldsymbol{i} = \{ (m + m_o) v \}\, \boldsymbol{i} \qquad 3$$



رسم 1



رسم 2

شكل م 5.8

أو

$$m_o v_o + m (v_o + u) = (+ m_o) v \qquad 4$$

وحل المعادلة 4 بدلالة v

$$v = v_o + \frac{m}{m_o + m} u \qquad 5$$

2 - حركتا العربة والحامل متضادتان. على نفس الغرار نكتب المعادلات 1- 5

$$\mathbf{K}_o = [m_o v_o + m (v_o - u)]\, \boldsymbol{i} \;\&\; \mathbf{K} = [(m + m_o)v]\, \boldsymbol{i} \qquad 6$$

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{K} \Rightarrow [m_o v_o + m (v_o - u)]\, \boldsymbol{i} = [(m + m_o) v]\, \boldsymbol{i} \qquad 7$$

أو

$$m_o v_o + m (v_o - u) = (m + m_o) v \qquad 8$$

وحل المعادلة 8 بدلالة v

$$v = v_o - \frac{m}{m_o + m} u \qquad 9$$

3.5.8 ديناميكا الأجسام المتغيرة الكتلة

1.3.5.8 المعادلة التفاضلية لحركة الجسم متغير الكتلة، حركة الصاروخ

لقد اعتُبِرت الكتلة حتى الآن كميةً قياسيةً ثابتةً لا تتغير بمرور الزمن. إلا أن تكوين جسيمات بعض الأنظمة والأجسام قد يطرأ عليها تغيير بتغير الزمن، كأن ينفصل عنها أو يتَّحِد بها أثناء حركتها جسيمات تُنقِص أو تزيد من كتلتها الإجمالية، وتؤول الكتلة تبعاً لذلك، مقداراً متغيراً زمنياً. ومن الأمثلة العملية على الأجسام المتغيرة الكتلة الصواريخ الفضائية، وعربات المناجم التي تتغير كتلها تدريجياً وبشكلٍ متصل، نتيجة استهلاك الوقود أو زيادة الأحمال وغيره.

إذا أمكن أثناء الحركة إهمال أبعاد الجسم المتحرك ذي الكتلة المتغيرة بالمقارنة مع المسافات التي يقطعها هذا الجسم، عنـــدئـــذ؛ يمكن دراسة حركته كجسمٍ متغير الكتلة ، تتحدد قيمة كتلته رياضياً بالعلاقة

$$m = m(t) \qquad 17.8$$

هذه الدالة، المعادلة 17.8، متصلةٌ زمنياً وقابلةٌ للتفاضل أيضاً. ولتسهيل عملية اشتقاق المعادلة التفاضلية لحركة الجسم المتغير الكتلة واستيعاب التحليل المرافق لهذه العملية يُضاف فرضيتان تُؤْخذان بعين الاعتبار: الأولى أن تسارع الجاذبية الأرضية ثابت $\mathbf{g} = \text{const.}$، والثانية أن حركة النظام أو الجسم متغير الكتلة تتم في خط مستقيم، و(محصلة) القوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام أو الجسم منطبقةٌ على مساره.

ولتناسب التسارع الأرضي عكسياً مع مربع البعد عن مركز الأرض تصبح الفرضية الأولى دقيقةً في حدود 5% للارتفاعات الأقل من 160 كيلو متراً فوق سطح الأرض[2]. والفرضيـــة الثانية تلغي التأثيرات الداخلية على النظام، لكنها تسمح بإيجاد المعادلة التفاضلية التي تُعَرِّف حركة الجسم متغير الكتلة بسهولةٍ ويُسر. هذه المعادلة تعتمد بشكلٍ رئيسي على التغيير الذي يحدث في الكتلة المتحركة للنظام.

عند انفصال أجزاءٍ (جسيمات) صغيرةٍ جداً من الجسم الأساسي المتحرك، تتولد بين الجسم المتحرك والأجزاء المنفصلة قوتا رد فعلٍ أوليتان، يكون لهما تأثيرٌ متبادل. ولا يشكل أيٌّ من هذين الجزأين (الجسم المتحرك والجزء المنفصل) نظاماً معزولاً، لأن كلَّ واحدٍ منهما يتفاعل مع الجزء الآخر. فالجسم الأساسي يدفع الجزء المنفصل إلى جهةٍ ما، بينما يدفع الجزء المنفصل الجسم المتحرك إلى الجهة المعاكسة بقوةٍ مساويـــةٍ ومضادة. وتعتبر القوتان اللّتان تُمثِّلان الفعل ورد الفعل قوتين داخليتين عند دراسةِ النظام. وإذا اعتبرنا الجسم الأساسي والجسيم المنفصل عنه فئةً واحدةً تُشَكّلُ نظـــاماً واحداً، عندئذٍ يُمكن استخـــدام قوانين ديناميكا الأجسام والأنظمة ذات الكتلة الثابتة.

---

[2] اعتمدنا في ذلك على الصيغة الرياضية التي تبين مقدار تسارع الجاذبية بدلالة الارتفاع

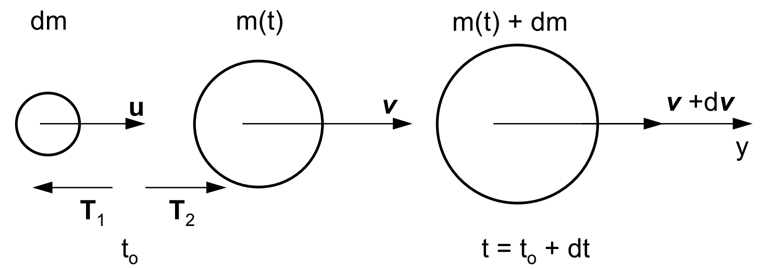
$$g_h = g - [\,0.30855 + 2.2\times10^{-4}\cos 2\phi - 7.2\times10^{-5}\,h\,]\times10^{-2}\,h$$

حيث h الارتفاع بالكيلومترات وg قيمة التسارع على الأرض بالمتر / ثانية^2، و ϕ زاوية خط العرض، أنظر هامش الصفحة 75.

ولإعطاء هذه الأفكار صيغة رياضية، نعتبر كتلة الجسم المتحرك عند اللحظة t_o كانت m(t)، وتتحرك بسرجهةٍ مطلقةٍ $\boldsymbol{v}$، وأن جسيماً أولياً كتلته dm(t)، التأم في تلك اللحظة مع الجسم الأساسي وكانت سرجهته المطلقة **u**، **شكل 3.8**. زخم النظام عند اللحظة t_o

$$\mathbf{K}_o = m(t)\,\boldsymbol{v} + dm(t)\,\mathbf{u} \qquad 1.18.8$$

وبمرور الفترة الزمنية dt، تتغير كتلة الجسم الأساسي بالمقدار dm(t)، لتُصبح m(t) + dm(t)، بينما تتغير سرجهته بالكمية المتجهة $d\boldsymbol{v}$ لتُصبح $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. ولذلك فزَخَمُ النظام المكون من الجزأين، الجسم الأساسي والجسيم الملتئم ، عند نهاية اللحظة t، $t = t_o + dt$، يُصبح



شكل 3.8

$$\mathbf{K} = [\,m(t) + dm(t)]\,[\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}\,] \qquad 2.18.8$$

تغير زخم النظام $d\mathbf{K}$ بين الزمنيين t و t_o يساوي الفرق بين الزخمين عندهما

$$d\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_o = [m(t) + dm(t)\,][\,\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}\,] - [\,m(t)\,\boldsymbol{v} + dm(t)\,\mathbf{u}\,] \qquad 19.8$$

وبعد إلغاء الأجزاء الصغيرة وإعادة ترتيب الباقي يصبح تغير الزخم

$$d\mathbf{K} = m(t)\,d\boldsymbol{v} - dm(t)\,[\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\,]$$

أما معدل تغير الزخم عند الزمن t_o، فهو المشتقة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m(t)\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - [\mathbf{u} - \boldsymbol{v}]\,\frac{dm(t)}{dt}$$

فالطرف الأيسر هو القوة **F** حسب المعادلة 14.8، $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}$. وإذا عرفنا المتغير الجديد $\boldsymbol{v}_r$، الذي يُمثل السرجهة النسبية لالتئام (انفصال) الجسيمات بالجسم الأساسي $\boldsymbol{v}_r = [\mathbf{u} - \boldsymbol{v}]$، فإن المعادلة السابقة تؤول إلى أيٍ من المعادلتين التاليتين

$$m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} + \boldsymbol{v}_r\,\frac{dm(t)}{dt} \quad \& \quad m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{T} \qquad 20.8$$

إذ تُمَثل كلتاهما المعادلة التفاضلية لحركة الجسم المتغير الكتلة . هذه المعادلات 20.8 ، تُدعى غالباً في الهندسة الفضائية **بمعادلة ميتشيرسكي**[3]، وهي تُشبِه إلى حدٍ بعيد معادلة حركة الجسم ذي الكتلة الثابتة، معادلة 2.3،

[3] **إيفان ميشيرسكي I. Meshchersky**، 1859-1935 عالم ميكانيكا روسي. نشر دراسته، أطروحة الدكتوراه "**ديناميكا الأجسام متغيرة الكتلة** "، بين عامي 1897-1904 وفيها أورد المعادلة 20.8.

والمتأثر بمحصلة القوتين الخارجية **F** وقوة رد الفعل $\mathbf{T} = \boldsymbol{v}_r \dfrac{dm}{dt}$. إن قوة رد الفعل **T**، ناتجةٌ من التئام أو انفصال جسيمات بالجسم الأساسي، وتعرف كحاصل ضرب السرجهة النسبية ومعدّل تغير الكتــلة. ويُساوي معدل تغيّر الكتلة عددياً كتلة الوقود المستهلكة أو المستنفدة في وَحْدَة الزمن، وهو كميةٌ موجبةٌ عند التئام الجســيمات بالجســم الأساسي $\dfrac{dm}{dt} > 0$، في حين أنّه كميةٌ سالبةٌ عند انفصالها عن الجسم الأساسي $\dfrac{dm}{dt} < 0$.

وعلى العموم، إذا كانت السرجهة النسبية مضادةً للقوة في الاتجاه، والكتلة الكلية متناقصةً، فإن قوة رد الفعل الناتجة من اندفاع الوقود للخلف هي قوة دفعٍ إضافيةٍ، تدفع الجسم المتحرك للأمام. وعلى النقيض من ذلك، إذا كانت السرجهة النسبية متسامتةً أو موازيةً للقوة، والكتلة الكلية متناقصةً، فإن قوة رد الفعل الناتجة من اندفاع الوقود هي قوة كبحٍ تعيق الجسم المتحرك. وبالعادة ، تُدعى القوتان المذكورتان أعلاه في هندسة الطيران بالقوة النفاثة - الدفع Thrust، إذا كانت قوةَ دفعٍ للأمام، وبالقوة الكابحة إذا كانت تعيق الصاروخ.

من جهةٍ أخرى، إذا كانت السرجهة النسبية لالتئام أو انفصال الجسيمات عن الجسم الأساسي تساوي صفراً $\boldsymbol{v}_r = 0$، فإن المعادلات 20.8 تؤول إلى معادلة حركة مركز كتــلـــة النظام، معادلة 10.8. وإذا كانت السرجهة المطلقة لالتئام أو انفصال الجسيمات عن الجسم الأساسي تساوي صفراً $\mathbf{u}=0$، فإن المعادلات نفسها 20.8 تصبح بعد ترتيبها واختصارها

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

والتي تكافئ قانون تغّير زخم النظام، معادلة 14.8. وحتى نتمكن من حساب مقدار القوة الإضافية T، نستخدم قانون تغير الزّخَم الخطِّي بصيغة الدفع الذي زودت به الكتلة dm، **شــكل 3.8**، وللاتجاه $\boldsymbol{j}$

$$-\mathbf{T}_1\, dt = dm\, [\, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v} - \mathbf{u}\,]$$

ولأن $dm\, d\boldsymbol{v} \cong 0$ تؤول المعادلة السابقة بعد قسمتها على dt إلى

$$\mathbf{T}_1 = -\frac{dm(t)}{dt}[\boldsymbol{v} - \mathbf{u}\,] = \frac{dm(t)}{dt}[\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\,]$$

أو

$$\mathbf{T}_1 = -\boldsymbol{v}_r \frac{dm(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T}_1 = -v_r \frac{dm(t)}{dt}\boldsymbol{j} \qquad 1.21.8$$

أما القوة $\mathbf{T}_2$ المساوية للقوة $\mathbf{T}_1$ فتؤثر لليمين

$$\mathbf{T}_2 = \boldsymbol{v}_r \frac{dm(t)}{dt} \qquad , \ \mathbf{T}_2 = v_r \frac{dm(t)}{dt}\boldsymbol{j} \qquad 2.21.8$$

ومن المهم دراسة الحالة التي تكون فيها $\mathbf{T}_2$ موجبة، أي قوةٌ إضافيةٌ تضاف إلى محصلة القوى المؤثرة على الجسم المتحرك. وهي الحالة التي تكون فيها إشارة كل من السرعة النسبية ومعدل تغير الكتلة واحدةً ؛ أي إمّا موجبتين وإمّا سالبتين في نفس الوقت.

2.3.5.8 معادلة تسيلكوفسكي[4]

كيف يمكن إيجاد معادلة حركة الصاروخ المنطلق في الفضاء باستخدام **معادلة ميتشيرسكي**، هذا ما فعله **ك. تسيلكوفسكي**.

اعتبر الصاروخ المنطلق في الفضاء ضمن مجال الجاذبية الأرضية تحت تأثير القوتين المُميزتين: قوة وزنه **mg** وقوة احتكاك الهواء $\mathbf{F_d}$ مع الوسط الذي يمر به. إذا اعتبرنا F_d قوةً عديمة التأثير نسبةً إلى القوى الأخرى، **شــكل 4.8**، فإن المعادلة 20.8 تُكتب بالشكل التالي

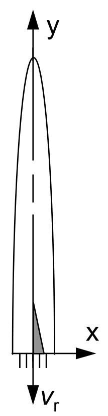
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}_r\frac{dm}{dt} + m\mathbf{g} \qquad 22.8$$

يتحرك الصاروخ، الذي كتلته متغيرةً زمنياً $m(t)$، ومقدارُها عند بداية حركته $m_o + m_{fmax}$، حيث إن كتلة m_o جِرم أو هيكل الصاروخ بدون أي وقود، و m_{fmax} كتلة الحمولة القصوى من الوقود. وإذا أضــفنــا فرضيةً جديدة وهي أن كتلة الصاروخ المتغيرة تساوي كتلة جرمه فارغاً m_o، مضافاً إليها كتلة الوقود المتبقية m_{fmax} - $m_f(t)$، حيث إن $m_f(t)$ كتلة الوقود المستهلكــة حتى اللحظة المعينة

$$m(t) = m_o + m_{fmax} - m_f(t) \qquad 23.8$$

وبدلالة المشتقة الأولى لطرفي هذه المعادلة $\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{dm_f(t)}{dt}$، وأخذ مسقط السرجهة النسبية على المحور y وتعويض ذلك في المعادلة 22.8 وحلها بدلالة dv يكون $\boldsymbol{v}_r = -v_r\boldsymbol{j}$

$$dv = v_r\frac{dm_f(t)}{m} - g\,dt \qquad 24.8$$



شــكل 4.8

التي تُمثل **المعادلة التفاضلية لحركة الصاروخ**، وهي معادلة أساسية في هندسة الفضاء والصواريخ. كما تكون صحيحةً للصواريخ والمركبات الفضائية البعيدة جداً عن جميع مراكز الجاذبية، عندها يمكن التعامل مع المعادلة 24.8 بدون عنصر الجاذبية الأرضية g. إن حل المعادلة المذكورة يتم بإجراء التكامل المحدود لطرفيها ففي اللحظة الابتدائية $t_0 = 0$، تكون سرعة الصاروخ الابتدائية v_o، وكتلة الوقود المستنفدة صفراً $m_f(t) = 0$. وفي اللحظة t، تصبح سرعــة الصاروخ v، وتؤول كتلة الوقود المستنفدة إلى $m_f(t)$. وعلى هذا الأساس بإجراء التكامل لطرفي المعادلة 24.8 وللشروط السابقة نحصل على

$$\int_{v_o}^{v} dv = +v_r\int_0^{m_f(t)}\frac{dm_f(t)}{m_o + m_{fmax} - m_f(t)} - \int_0^t g\,dt$$

---

[4] **ك. تسيلكوفسكي** K.Tsiolkovsky، 1857- 1935 عالِمٌ ومخترعٌ روسي. نشر البحث "اكتشاف الفضاء بالالات النفاثة" في المجلة العلمية الروسية **نــاوؤتــشينــه أوبــوزورينيــه - التعليقات العلمية** في عدد أيار لعام 1903، وفيه وردت المعادلة المشهورة، معادلة 26.8.

$$v = v_o - g\,t - v_r \ln[m_o + m_{fmax} - m_f(t)]\Big|_0^{m_f(t)}$$

أو

$$v = v_o - g\,t - v_r \ln \frac{m_o + m_{fmax} - m_f(t)}{m_o + m_{fmax}} \qquad 25.8$$

التي تُعرّف سرعة الصاروخ كدالة زمنية. ومن الأهمية بمكان، معرفة السرعة القصوى التي يـصلها الصاروخ عند استنفاده كل الوقود المحمول؛ $m_f(t)=m_{fmax}$، عندئـذٍ تؤول المعادلة 25.8 إلى الشكل الأكثر اقتضاباً

$$v = v_o - gt + v_r \ln(1+\frac{m_{fmax}}{m_o}) \qquad 26.8$$

يتضح لنا من المعادلة الأخيرة 26.8، أن سرعة الصاروخ القصوى تعتمد على 1- سرعـة الانطلاق الابتدائية v_o و2- السرعـة النسبية لاندفاع منتجات الوقود من فوهة محرك الصاروخ v_r، أو سرعة العادم و3 - النسبـة بين كتلة الوقود القصوى وكتلة جِرْم الصاروخ $\frac{m_{fmax}}{m_o}$ (الاحتياطي النسبي للوقود) والمسمّى عادة **بعدد تسيلكوفسكي** N_T. كما تُدعى المعادلة نفسها 26.8 **بمعادلة تسيلكوفسكي.** إن نظرةً متفحصةً لهذه المعادلة تُثْبِت كذلك أن سرعة الصاروخ القصوى في نهاية فترة احتراق الوقود، لا تعتمد على نظام عمل المحرك النفاث، ولا على زمن احتراق الوقود داخل حجرات المحرك، بل على الاحتياطي النسبي $\frac{m_{fmax}}{m_o}$. وهنا تكمن قيمة كلٍ من **عدد تسيلكوفسكي** N_T **ومعادلة تسيلكوفسكي**، في أنهما يُبينان الطرق المحتملة للحصول على السرعات الكبيرة اللازمة للطيران في الفضاء.

ولتوصيل مركبة فضائية إلى السرعة الفضائية الأولى $v=v_c$، واللازمة على الأقل للدوران حول الأرض في مدارٍ دائري يستلزم نظرياً زيادة سرعة الانطلاق الابتدائيةٍ وزيادة **عدد تسيلكوفسكي** N_T والسرعة النسبية v_r. ولعدم مواءمته للإنسان المنطلق في الفضاء يلغى المتغير الأول v_o. كما ويلغى المتغير الثالث لمحدوديته. أما التحكم في المتغير الثاني فيظهر أنه يجب أن يزيد عن أربعين ضعفاً؛ أي $N_T>40$ (أكبر من 40). لهذا استعيض عن هذا الصاروخ الضخم بالصاروخ المتعدد المراحل الذي تنفصل مراحله (أجزاءه) لحظة استهلاكه الوقود الذي تحمله المرحلة بكامله. لقد ساعد هذا النوع من الصواريخ المتعددة المراحل الفضائيين على إطلاق الأقمار الصناعية والمركبات الفضائية حول الأرض وإلى الفضاء.

وتخضع زيادة السرعة الابتدائية v_o لصعوباتٍ تقنيةٍ وهائلةٍ ليس من السهولة التحكم بها. كما تعتمد السرعة النسبية لاندفاع منتجات الوقود من الصاروخ على الصفات الكيماوية للوقود وتصميم الصاروخ نفسه. وهذه السرعة النسبية محدودة، ولن تزيد عن مقدارٍ معين. لهذا فإن أفضل الطرق للحصول على السرعات العالية للصواريخ المنطلقة في الفضاء يكْمُن في التحكم **بعدد تسيلكوفسكي** N_T. أي بزيادة الوقود المحمول على الصاروخ مع تخفيض جِرْمِ الصاروخ (وزنه) فارغاً. وهذا أيضا كما يظهر، يخضع لصعوبات تقنية خاصةٍ بصناعة الصاروخ نفسه.

وإذا أردنا أن نصل بالصاروخ إلى السرعة الفضائية الأولى $v_c = 8\,[km/s]$، بسرعةٍ ابتدائيةٍ للانطلاق من على سطح الأرض مساوية للصفر $v_o = 0$، وسرعة نسبية لاندفاع منتجات الوقود من فوهة المحرك $v_r = 2.4\,[km/s]$. وإذا أضفنا ما بين 10 - 15% للتَغلُب على قوة الجاذبية الأرضية ومقاومة الوسط لحظة بـدايــة الحركة من على سطح الأرض، عندئذٍ تصبح السرعة عند التصميم $v_c = 9\,[km/s]$. وتــعويــض بدل هذه القيمة في المعادلة 26.8

$$9\,[km/s] = 2.4\,[km/s]\ln\left(1+\frac{m_{fmax}}{m_o}\right)$$

أو بدلالة **عدد تسيلكوفسكي**

$$N_T = \frac{m_{fmax}}{m_o} = 41.5$$

أي يجب أن تزيد النسبة بين كتلة الوقود المحمول القصوى إلى كتلة جرْمِ الصاروخ عن أربعين ضعفاً على الأقل، بما يتبع ذلك صعوبات تقنيةٍ إضافية. لهذا استُعِيضَ عن هذا الصاروخ الضخم، ذو الوقود السائل، المنطــلق بسرعة نفثٍ خلفيةٍ مقدارها $v_r = 2\text{-}2.5\,[km/s]$، و**عدد تسيلكوفسكي** أكبر من 40 بالصاروخ المتعدد الـــمراحــل Multistage Rocket، الذي تنفصل مراحله (أجزاؤه) لحظة استهلاكه الوقود الذي تحمله المرحلة بالكامل. هذا يعني عملياً تناقص كتلة الصاروخ، وتبعا لذلك زيادة **عدد تسيلكوفسكي**، تكتسب فيه المرحلة الأخيرة سرعةً إضافية. لقد ساعد هذا النوع من الصورايخ المتعددة المراحل الفضائيين على إطلاق الأقمار الصناعية والمركبات الفضائية حول الأرض وإلى الفضاء.

وفي حالة الحركة البعيدة جداً عن جميع مراكز الجاذبية، فإننا نستطيع إلغاء العنصر g من المعادلتين 25.8 - 26.8. وتسري المعادلتين نفسيهما بدون عنصر الجاذبية بصورةٍ تقريبية للحالات التي يكون فيها التغير في الزخم الناتج عن العادم أكبر بكثير من التغير في الزخم الناتج عن الجاذبية في نفس الفترة الزمنية.

حــلُّ الـــمســائــل

يقوم حل المسائل والتمارين على إيجاد وتعريف معادلة حركة النظام المتغيِّر الكتلة، معادلات 20.8، وحساب قوة الدفع الناتجة من نفث الغازات واحتراق الوقود، معادلات 21.8، ثُمَّ حساب السرعة القصوى لحظة اكتمال عملية الاحتراق من معادلة تسيلكوفسكي 26.8.

أسـئــلــةٌ مــحــلــولــة

ســـــؤال م 6.8

صاروخ ذو مرحلـــةٍ واحدة كتلته فارغاً m_o ، ينطلق رأسياً للأعلى من حالة السكون من سطح الأرض. نسبة كتلته فارغاً إلى كتلة وقوده القصوى $\frac{m_o}{m_{fmax}} = \frac{1}{5}$، وسرجهة تدفق النفث من الصاروخ v_r. إذا استغرق احتراق الوقود الكلي T. أوجد بإهمال تأثير مقاومة الهواء على الصاروخ تسارعه وسرعته وارتفاعه كدوالٍ زمنية. وأوجد كذلك قيم الخصائص الكينماتيكية السابقة، إذا كانت m_o=600[kg]، T=100[s]، v_r=1600[m/s].

الحـــــل

أ - **تسارع الصاروخ**: بإسقاط معادلة **ميتشيرسكي** 20.8 على المحور oy حيث **F=mg**، يكون

$$m(t)\frac{dv}{dt} = -m(t)\,g - v_r\frac{dm(t)}{dt} \qquad 1$$

كتلة الصاروخ m(t) متغيرة، معادلة 23.8

$$m(t) = m_o + m_{fmax} - m_f(t)$$

ولأن $m_{fmax} = 5m_o$ فإن

$$m(t) = 6m_o - m_f(t) \qquad 2$$

معدل استهلاك الوقود

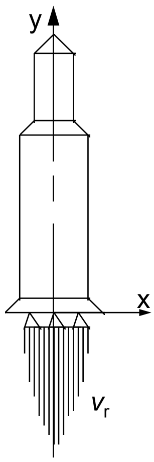
$$T\frac{dm_f(t)}{dt} = m_{f\,max} \Rightarrow \frac{dm_f(t)}{dt} = \frac{5m_o}{T} \qquad 3$$

وبمفاضلة المعادلة 2

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{dm_f(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = -\frac{5m_o}{T} \qquad 4$$

وربطها بالمعادلة 3 يعطي

$$m(t) = 6m_o - 5m_o\,t/T \qquad 5$$



شـكـل م 6.8

وباستبدال المتغيرين، معدل استهلاك الوقود 4 ولكتلة المتغيرة 5 في المعادلة الرئيسية 1 وحلُ الناتج بدلالة التسارع، ينتج بعد اختصار m_o أن

$$a = -g + \frac{v_r}{1.2T - t} \qquad 6$$

تمثل معادلة تسارع الصاروخ كدالة تسارع الجاذبية الأرضية g وسرعة تدفق النفث النسبية من الصاروخ v_r بالإضافة إلى زمن احتراق الوقود الكلي T والزمن t. وحيث إن المتغيرات g، v_r و T معروفة كثوابت لهذه الحالة الخاصة تمثل المعادلة 6 دالةً للمتغير المميز t.

ب - سرعة الصاروخ

تتحدد سرعة الصاروخ النهائية من المعادلة 6. فباستبدال $a = dv/dt$، وضرب طرفيها في dt ينتج

$$dv = -g\,dt + \frac{v_r}{1.2T - t}dt \qquad 7$$

وبعد إجراء التكامل لطرفي هذه المعادلة بين اللحظتين: الابتدائية $t_o = 0$ و t، تتغير السرعة من $v_o = 0$ لتصل v

$$v = -gt + v_r \ln\frac{1.2T}{1.2T - t} \qquad 8$$

أو كدالة سرعة بدلالة تسارع الجاذبية الأرضية g وسرعة تدفق النفث من الصاروخ v_r بالإضافة إلى زمن احتراق الوقود الكلي T والزمن t.

ج- ارتفاع الصاروخ

يتحدد ارتفاع الصاروخ y من المعادلة 8 حيث إن $v = \frac{dy}{dt}$

$$dy = -g\,t\,dt + v_r \ln \frac{1.2\,T}{1.2\,T - t}\,dt \qquad 9$$

وإذا افترضنا، لتسهيل عملية إجراء التكامل الفرضية $B = \frac{5}{6T}$، فإن

$$y = -g\frac{t^2}{2} + \frac{v_r}{B}\left[(1 - B\,t)\,\{\ln(1 - Bt) - 1\}\right]_0^t$$

$$y = -g\frac{t^2}{2} + \frac{6\,v_r\,T}{5}\left[(1 - \frac{5t}{6T})\{\ln(1 - \frac{5t}{6T}) - 1\} + 1\right] \qquad 10$$

وللقيم $m_o = 600$ [kg]، $T = 100$ [s]، $v_r = 1600$ [m/s]، نحدد قيم التسارع والسرعة والارتفاع فتتحدد من المعادلات 6، 8 و 10 بالترتيب. **تسارع الصاروخ**

$$a = -9.8 + \frac{1600}{120 - 100} = 70.2\ [m/s^2] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 7.16\,g\,\boldsymbol{j} \qquad 11$$

سرعة الصاروخ

$$v = -9.8 \times 100 - 1600 \ln\{1 - \frac{5}{600}t\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{max} = 1.89\ [km/s]\,\boldsymbol{j} \qquad 12$$

ارتفاع الصاروخ

$$y = -9.8 \times \frac{100^2}{2} + \frac{6 \times 1600 \times 100}{5}\left[(1 - \frac{5 \times 100}{6 \times 100})\{\ln(1 - \frac{5 \times 100}{6 \times 100}) - 1\} + 1\right]$$

$$\mathbf{y} = 53.7\ [km]\,\boldsymbol{j} \qquad 13$$

ســؤال م 7.8

ينطلق صاروخ **السّبْر** Sounding Rocket للسماء من سطح الأرض بدون سرعة ابتدائية. يتكون هيكل الصاروخ من الرأس A، كتلته 30 كيلوغرام، والمرحلتين B؛ كتلة وقودها 240 كيلوغرام، وكتلة خزانها 30 كيلوغرام، والمرحلة C؛ كتلة وقودها 360 كيلوغرام، بينما كتلة خزانها 40 كيلوغرام. إذا مرت 16 ثانية بين انتهاء المرحلة الأولى وبداية المرحلة الثانية، فما أقصى ارتفاعٍ يصله (رأس) الصاروخ؟ أهمل مقاومة الهواء في طبقات الجو العليا واعتبر g ثابتة خلال الرحلة.

المرحلة الأولى: سرعة العادم النسبية $v_{r1} = 2$ [km/s] ومعدل استهلاك الوقود 12 كيلوغرام/ثانية.

المرحلة الثانية: سرعة العادم النسبية $v_{r2} = 0.8$ [km/s] ومعدل استهلاك الوقود 8 كيلوغرام/ثانية.

الـــحـــل

ينطلق صاروخ السّبْر من سطح الأرض بدون سرعـــةٍ ابتدائية، $\boldsymbol{v}_o = 0$. وتحت تأثير دفع العادم يصل إلى النقطة قاطعاً بذلك الارتفاع h_1. من هناك، ينطلق بالسرجهة $\boldsymbol{v}_1$ لمدة 16 ثانية، بدون تأثير العادم، حتى يصل للنقطة 1' مكتسباً بذلك الارتفاع h'_1. ومن النقطة 1' ينطلق الصاروخ وللمرة الثانية تحت تأثير دفع العادم بالسرجهة الجديدة $\boldsymbol{v}'_1$ حتى يصل إلى النقطة 2، مكتسباً بذلك الارتفاع h_2. وأخيراً، ينطلق الصاروخ في الفضاء من النقطة 2، بالسرجهة $\boldsymbol{v}_2$، فيصل أقصى ارتفاع له H. ومن الطبيعي أن قوة الجاذبية تعيق الحركة في جميع الحالات السابقة. الزمن الذي تستغرقه المرحلة الأولى

$$t_1 = \frac{m_{1f\,max}}{dm_1(t)/dt} = \frac{360}{12} = 30\ [s] \qquad 1$$

كتلة الصاروخ المتغيرة، معادلة 23.8

$m_1\,(t) = m_{1o} + m_{1f\,max} - m_{1f}(t)$

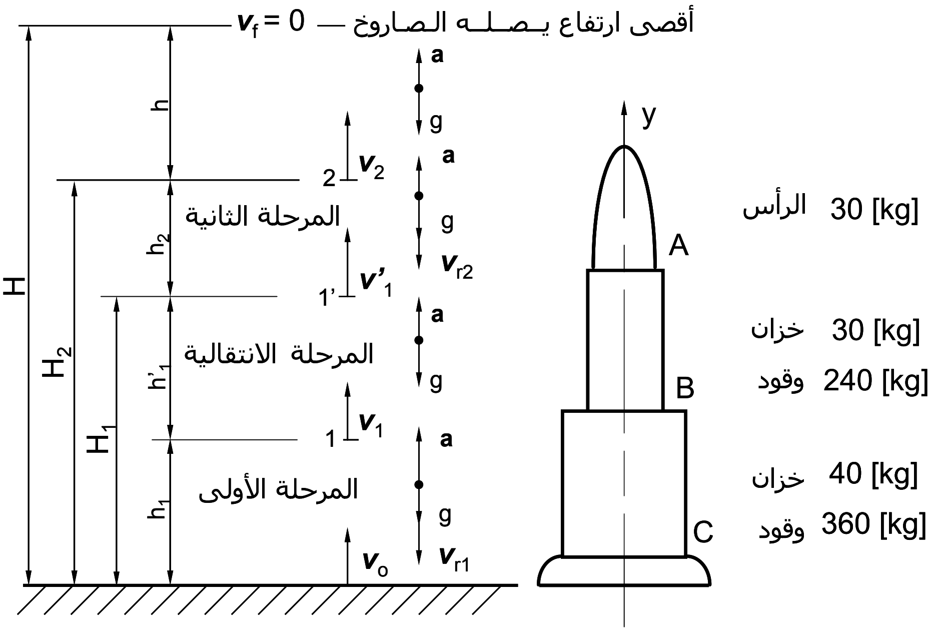
$m_{1o} = 30 + 30 + 240 + 40 = 340$ [kg] 2

$m_{1f\,max} = 360$ [kg] 3

بينما سرجهة نفث العادم للخلف للمرحلة الأولى

$\boldsymbol{v}_{r1} = -\,v_{r1}\,\boldsymbol{j} = -2000\,\boldsymbol{j}$ 4

وباستبدال $g = 9.8[m/s^2]$ وباقي القيم من العلاقات 1 - 4 في المعادلة الرئيسية 26.8 ينتج أن سرعة الصاروخ في نهاية المرحلة الأولى تبلغ بعد إلغاء الحد v_o



شـــكل م 7.8

$$v_1 = -\,g\,t_1 + v_{r1}\,\ln(1+\frac{m_{fmax}}{m_o}) = -\,9.8 \times 30 + 2000 \times \ln(1+\frac{360}{340})$$

$v_1 = 1150$ [m/s] , $\boldsymbol{v}_1 = 1.15$ [km/s] $\boldsymbol{j}$ 5

سرعة الصاروخ في نهاية المرحلة الانتقالية

$v'_1 = v_1 - g\,t'_1 = 1150 - 9.8 \times 16$

$v'_1 = 993.2$ [m/s] 6

ولحساب السرعة القصوى التي يصلها الصاروخ لحظة نهاية المرحلة الثانية، نحدد معادلة تغير الكتلة في المرحلة الثانية

$m_2\,(t) = m_{2o} + m_{2f\,max} - m_{2f}\,(t)$

$m_{2o} = \; = 30 + \; 30 \; + 240 \; = \; 300$ [kg] 7

$m_{2f\,max} \; = \; 240$ [kg] 8

الزمن الذي تستغرقه المرحلة الثانية

$$t_2 = \frac{m_{2f\,max}}{dm_2(t)/dt} = \frac{240}{8} = 30 \; [s] \qquad 9$$

سرعة الصاروخ في نهاية المرحلة الثانية، معادلات 6 - 9

$$v_2 \; = v'_1 - \; g\, t_2 \; + \; v_{r2}\, \ln(1+\frac{m_{2f\,max}}{m_o}) \quad = \; 993.2 \; - \; 9.8\times 30 \; + \; 800 \times \ln(1+\frac{240}{60})$$

$v_2 \; = \; 1987$ [m/s] , $\boldsymbol{v}_2 = 1.987$ [km/s] $\boldsymbol{j}$ 10

ولإيجاد الارتفاع الذي يصله الصاروخ عند نهاية المرحلة الأولى نكتب كتلة الصاروخ كدالة زمنية

$$m_1\,(\,t\,) \; = \; m_{1o} \; + \; m_{1f\,max} \; - \; m_{1f}\,(\,t\,)$$

$$m_1\,(\,t\,) \; = (\,30 + 30 + 240 + 40\,) + \; 360 \; - 12\,t$$

$$\therefore\; m_1\,(\,t\,) \; = \; 700 \; - 12\,t \;\;\&\;\; m_{1o} + \; m_{1fmax} = 700 \qquad 11$$

وباستبدال $m_{2f\,max}$ +m_{1o} و$m_1(t)$ الواردة في المعادلة 25.8 بقيمهما من معادلة 11، ينتج السرعة كدالة زمنية

$$v_1 \; = - g\, t_1 \; - \; v_{r1} \times \ln \frac{700 - 12\,t}{700} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \; - g\, t_1 \; - \; v_{r1}\, \ln\,(\,1 - B_1\, t\,) \qquad 12$$

حيث B_1 ثابت، $B_1 = 12\,/\,700 = 0.01714$. الارتفاع h_1 الذي يصله الصاروخ حتى نهاية المرحلة الأولى يحدد كتكامل معادلة السرعة الزمنية، معادلة 12

$$h_1 \; = \int_0^{t_1} v_1\, dt = \; -g\int_0^{t_1} t\; dt \; - \frac{v_{r1}}{B_1} \int_0^{t_1} \ln(1 - B_1\, t)\, dt$$

$$h_1 = -9.8\; \frac{t_1^2}{2} + \frac{v_{r1}}{B_1} \left\{ \left[1 - B_1\, t_1\right]\left[\ln\,(\,1 - B_1\, t_1\,) - 1)\right] + 1 \right\} \qquad 13$$

وباستبدال القيم الواردة أعلاه B_1، v_{r1}، g و $t_1 = 30$ ثانية، فترة احتراق الوقود في المرحلة الأولى

$$h_1 = -\frac{9.8}{2} \times 30^2 + \frac{2000}{0.01714} \left\{ \left[1 - 0.01714 \times 30\right]\left[\ln(1 - 0.01714 \times 30) - 1\right] + 1 \right\}$$

$h_1 = 14.7$ [km] 14

أقصى ارتفاع يقطعه الصاروخ من سطح الأرض إلى بداية اشتعال المرحلة الثانية

$$H_1 = h_1 + h'_1 \; = h_1 + v_1\, t'_1 \; - g(\,t'_1\,)^2\,/\,2$$

$$= 14700 \; + \; 1150 \times 16 \; - \; 9.8 \times 16^2\,/\,2$$

$H_1 = 31.85$ [km] 15

ولإيجاد الارتفاع الذي يصله الصاروخ عند نهاية المرحلة الثانية نكتب كتلة الصاروخ كدالة زمنية

$$m_2(t) = m_{1o} + m_{1fmax} - m_{1f}(t)$$
$$m_2(t) = (30 + 30) + 240 - 8t$$
$$\therefore m_2(t) = 300 - 8t \quad \& \quad m_{2o} + m_{2\,fmax} = 300 \qquad 16$$

وباستبدال $m_{2o}+m_{2f\,max}$ و $m_2(t)$ الواردة في المعادلة 25.8 بقيمهما من معادلة 15، ينتج السرعة كدالة زمن

$$v_2 = v'_1 - g\,t_2 - v_{r1} \ln \frac{300 - 8t}{300} = v'_1 - 9.8\,t_2 - v_{r2} \ln(1 - B_2 t) \qquad 17$$

حيث B_2 ثابت، $B_2 = 8/300 = 0.02667$. الارتفاع h_2 الذي يصله الصاروخ حتى نهاية المرحلة الثانية يحدد كتكامل معادلة السرعة الزمنية، معادلة 17

$$h_2 = \int_0^{t_2} v_2\,dt = 993.2\int_0^{t_2} dt - 9.8\int_0^{t_2} t\,dt + 800\int_0^{t_2} \ln\frac{300}{[300-8t]}\,dt \qquad 18$$

وباستبدال القيم الواردة أعلاه B_2، v_{r2}، g و $t_2 = 30$ ثانية، فترة احتراق الوقود في المرحلة الأولى

$$h_2 = 993.2\times 30 - \frac{9.8}{2}\times 30^2 + \frac{800}{0.02667}\left\{[1-0.02667\times 30][\ln(1-0.02667\times 30)-1]+1\right\}$$

$$h_2 = 39.73\ [km] \qquad 19$$

أقصى ارتفاع يقطعه الصاروخ من سطح الأرض إلى بداية اشتعال المرحلة الثانية

$$H_2 = H_1 + h_2 = 31.85 + 39.73 \Rightarrow H_2 = 71.58\ [km] \qquad 20$$

ولإيجاد أقصى ارتفاعٍ يصله صاروخ السَّبْر نستخدم قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، معادلة 25.5، للوضعين 2 والنهائي f حيث يكافئ الأخير أقصى ارتفاع يصله الصاروخ. الطاقة الميكانيكية لِوَحْدَة كتلة الصاروخ للوضع 2

$$E_2 = T_2 + \Pi_2 \Rightarrow E_2 = \frac{v_2^2}{2} - \frac{gR^2}{R+H_2} \qquad 21$$

حيث T_2 الطاقة الحركية للصاروخ بينما Π_2 طاقة وضعه. الطاقة الميكانيكية لِوَحْدَة كتلته عند أقصى ارتفاع

$$E_f = T_f + \Pi_f \Rightarrow E_f = 0 - \frac{gR^2}{R+H} \qquad 22$$

وبمساواة المعادلة 21 مع المعادلة 22 وحل الناتج بدلالة H يكون

$$H = \frac{2gR^2(R+H_2)}{2gR^2 - v_2^2(R+H_2)} - R$$
$$H = \frac{2\times 9.8\times 10^{-3}\times 6370^2(6370+71.58)}{2\times 9.8\times 10^{-3}\times 6370^2 - 1.987^2(6370+71.58)} - 6370$$
$$H = 284.4\ [km]\ ,\ \mathbf{H} \cong 284.4\ [km]\ \boldsymbol{j} \qquad 23$$

إذا ألغيت المرحلة الانتقالية ومن ثم جمعت المرحلتين الأولى والثانية في مرحلةٍ واحدة، خصائصها كالتالي $v_r = 1400$ متر/ثانية ومعدل استهلاك الوقود يساوي 10 كيلوغرام لكل ثانية، كتلة الخزان الرئيسي 70 كيلوغرام وكتلة الوقود 600 كيلوغرام. فما أقصى سرعة يصلها للصاروخ عند استهلاكه الوقود والارتفاع الأقصى الذي يصله؟

$$m_o = 30 + 70 = 100\ [kg] \qquad 24$$

$$v'_2 = -gt + v_r \ln(1+\frac{m_{fmax}}{m_o}) = -9.8\times 60 + 1400\times\ln(1+\frac{600}{100}) \quad 25$$

$v'_2 = 2.136$ [km/s]

$$v'_2 = -9.8t + 1400\times\ln\left\{\frac{700-10t}{700}\right\} \quad 26$$

$$H'_2 = \int_0^{60} v'_2(t)\,dt \Rightarrow H'_2 = 39.1\ [km]\ \&\ H' = 283.7\ [km] \quad 27$$

ســـــؤال م 8.8

في شهر تموز/ 2000 أجريت تجارب عديدة في الصحراء الأردنية لاختراق حاجز الصوت. فقاد الطيار البريطاني **أندي غرين** السيارة الصاروخية ثراست إس إس سي Thrust Super Sonic Car التي تعمل بمحركي طائرة فانتوم من نوع رولز رويز. إذا كانت المعطيات الأولية لهذه التجربة تشير إلى أن كتلة السيارة 5520 كيلوغرام وتحمل وقوداً، كتلته 1280 كيلوغرام، تستهلكه بمعدلٍ ثابت، يعادل 4 كيلوغرام/ ثانية. ما سرعة السيارة بعيد مرور 50 ثانية؟ وهل يمكنها تخطي سرعة الصوت ضمن فترة استهلاكها الوقود؟ اعتبر الحركة تبدأ من السكون وسرعة نفث العادم من الخلف 2.025 كيلومتر/ثانية. افترض مقاومة الهواء للسيارة بدلالة السرعة للحالتين $F_{D1} = 9v$ و $F_{D2} = 0.0625 v^2$

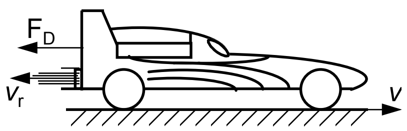
الـــحـــل

كتلة السيارة المتغيرة

$m(t) = m_o + m_{fmax} - m_f(t)$

$m(t) = 5520 + 1280 - 4t$

$m(t) = 6800 - 4t \quad 1$



شـــكل م 8.8

إذا استبدلنا المتغيرات في المعادلة 20.8 كما يلي، $m(t)$ من المعادلة 1، $F = F_{D1} = -9v$، $v_r = 2.025$ [km/s] و $dm/dt = 4$ [km/s] يكون

$$(6800 - 4t)\frac{dv}{dt} = -9v + 2025\times 4 \quad 2$$

وبترتيب هذه كمعادلة تفاضلية

$$\frac{dv}{9(900-v)} = \frac{dt}{4(1700-t)} \quad 3$$

ومن ثَمّ إجراء التكامل

$$\frac{1}{9}\ln\left\{1-\frac{v}{900}\right\} = \frac{1}{4}\ln\left\{1-\frac{t}{1700}\right\} \quad 4$$

يعطي الحل كدالة سرعة

$$v = 900\left\{1-\left\{1-\frac{t}{1700}\right\}^{2.25}\right\} \quad 5$$

السرعة في الثانية $t_1 = 50[s]$ ولحظة استنفاده الوقود $t_2 = 320[s]$

v_{50} = 58.47 [m/s] & v_{320} = 337 [m/s] 6

وللحالة الثانية، نستبدل $F=F_{D2}=-0.0625\,v^2$، (بدل $9v$ - في المعادلة 2) نحصل على المعادلة

$$(6800 - 4t)\frac{dv}{dt} = -0.0625v^2 + 2025 \times 4 \qquad 7$$

وبترتيبها

$$\frac{dv}{360^2 - v^2} = \frac{0.0625}{4}\frac{dt}{(1700 - t)}$$

وإجراء التكامل يكون

$$\frac{1}{2 \times 360}\ln\left\{\frac{360 + v}{360 - v}\right\} = -\frac{0.0625}{4}\ln\left\{1 - \frac{t}{1700}\right\} \qquad 8$$

لنجد أن الحل كدالة سرعة يعطي

$$v = 360\frac{\left\{\left\{1 - \frac{t}{1700}\right\}^{-11.25} - 1\right\}}{\left\{\left\{1 - \frac{t}{1700}\right\}^{-11.25} + 1\right\}} \qquad 9$$

السرعة في الثانية t_1 = 50[s] ولحظة استنفاده الوقود t_2 = 320[s]

v_{50} = 59.89 [m/s] & v_{320} = 297.1 [m/s] 10

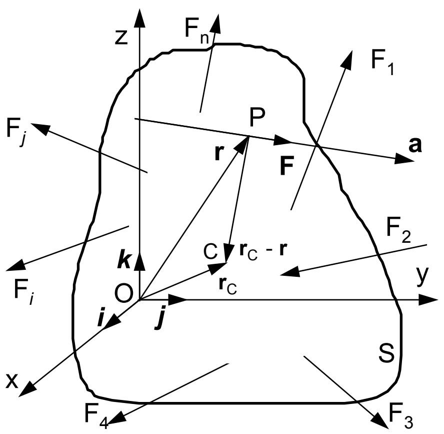
أي أن سرعة السيارة الصاروخية ستصل في الحالة الأولى إلى 99.1% من سرعة الصوت بينما في الحالة الثانية ستصل إلى 87.4% من سرعة الصوت فقط لحظة استفاد الوقود بالكامل.

6.8 ديناميكا الجسم الجاسئ

لقد عرف الجسم الجاسئ في البندين 4.2 و 1.8 من وجهتي النظر الكينماتيكية والديناميكية بالجسم الذي لا يتغير شكله الهندسي والمكون من عددٍ هائلٍ من الجسيمات المنتظمة في الفراغ والمترابطة بعضها مع بعض بأبعادٍ متساويـــةٍ وثابتة. وسنعتبر في أغلب الحسابات الهندسية والميكانيكية أن كتلة الجسم الجاسئ متركزةً فقط في نقطةٍ واحدةٍ هي مركز الكتلة.

إن البحث في حركة وديناميكا الجسم الجاسئ سيعتمد بالدرجة الأولى على القوانين العامة لحركة النظام للحصول على معادلته التفاضلية. وتعرف حركة الجسم الجاسئ بالعلاقة بين محصلة القوى المؤثرة ومجموع الحركات المشتركة لجسيماته المكونة له. ومع أن حركة الجسم الجاسئ في الفراغ تتحدد بست درجات حرية، أي يمكنه التحرك ست حركاتٍ مستقلةٍ بعضها عن بعض، إلا ان ما يميز حركته هو اعتمادها بشكلٍ أساسي على كينماتيكا الجسم الجاسئ. وقد قسمت حركته إلى حركةٍ انتقاليةٍ وحركةٍ دورانيةٍ حول محورٍ ثابت وحركةٍ مستوية وحركةٍ دورانيةٍ حول نقطة ثابتة، وأخيراً الحركة العامة. وسندرس الحركات الثلاث الأولى تباعاً.

1.6.8 الحركة الإنتقالية



شـــكل 6.8

عند حركة الجسم الجاسئ الانتقالية فإن كل جزءٍ (جسيم) من أجزائه (جسيماته) سيتحرك بنفس الطريقة التي تتحرك بها باقي الأجزاء؛ ولهذا فإن كل خط في هذا الجسم سيبقى موازياً لنفس الخط في وضعه الأصلي. وتـبعـاً لذلك؛ تكون مسارات الأجزاء متشابهةً ومتوازية. ويكفي عندها لدراسة حركة الجسم الجاسئ دراسة حركة جزءٍ واحدٍ من أجزائه، الذي من المفضل أن يكون مركز كتلة الجسم الجاسئ.

إذا افترضنا مقطعاً رقيقاً S، موازياً لمستوى الحركة الإنتقالية، وشاملاً لمركز الكتلة ، فيمكن تمثيل جميع القوى المؤثرة F_1 ، F_2 ، ...، F_n، ومحصلتها F، متسامتةً مع هذا المستوى، **شـــكل 6.8**. كلُّ جسيمٍ من جسيمات الجسم الجاسئ يتحرك بتسارعٍ يكافئ تســارع مركز الكتلة $\mathbf{a}_C$. لذلك نكتب المعادلة 10.8 للجسم الجاسئ عند حركته الانتقالية

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a}_C \qquad 27.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ. وإذا اعتبــرنا النقطة P نقطةً اعتباطيةً على خط عمل محصلة القوى الخارجية **F**، فإن عزم هذه المحصلة حول مركز الإحداثيات القصورية O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 1.28.8$$

يساوي أيضاً، محصلة عزوم كل القوى الخارجية المؤثرة على جميع جسيمات الجسم الجاسئ بالنسبة إلى نفس المركز. ورياضياً

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$$

ولإن تسارعات كل جسيمات الجسيم الجاسئ عند الحركة الانتقالية متساوية، فإن استبدال $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}_i = M\mathbf{r}_C$ من المعادلة 4.8 يعطي

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_C \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 2.28.8$$

وبربط المعادلتين 28.8 مع بعض يكون

$$\mathbf{r}_C \times M\,\mathbf{a}_C = \mathbf{r} \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 29.8$$

هذه المعادلة 29.8 تكون صحيحةً إذا كانت $\mathbf{a}_C = 0$ أو $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}$. وبينما يشطب الاحتمال الأول لإلغائه شرطاً ضرورياً للحركة الانتقالية المتسارعة يبين الاحتمال الثاني أن مركز الكتلة C منطبقٌ على النقطة P (أو بالعكس) . وهذا يعني أن خطَّ عمل القوة **F** يَمُرُّ بالضرورة عبر النقطة C. ولذلك يمكن القول : **إذا كانت حركة الجسم الجاسئ انتقالية فإن محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه تمر بالضرورة في مركز كتلته ، بينما تساوي محصلة عزوم جميع القوى الخارجية المؤثرة عليه حول محورٍ يمر في مركز كتلته صفراً.** ورياضياً فإن حركة الجسم الجاسئ الانتقالية تُستَوْفَى بمعادلتين اتجاهيتين ، إحداهما المعادلة 27.8 و الأخرى المعادلة 29.8 . ومن الطبيعي أن تكتب تلك المعادلات كمعادلاتٍ قِياسية

$$F_x = M\,a_{Cx}\,, \qquad F_y = M\,a_{Cx}\,, \qquad F_z = M\,a_{Cz} \qquad 1.27.8$$

$$M_{Cx} = 0\,, \qquad M_{Cy} = 0, \qquad M_{Cz} = 0 \qquad 1.29.8$$

وعندما يتحرك الجسم في مستوىً واحد حركةً انتقالية ، بحيث توازي جميع متَّجِهات القوى الخارجية مستوى الحركة، فإن اثنتين من المعادلات 1.27.8 وإحدى المعادلات 1.29.8 لعزم القوى العمودي على مستوى الحركة تعرف حركة هذا الجسم الجاسئ. أمَّا إذا تحرك الجسم الجاسئ في خطٍ مستقيم، وليكن على المحور الأفقي Ox، فإن المعادلة الوحيدة التي تعرف الحركة هي أولى معادلات 1.27.8.

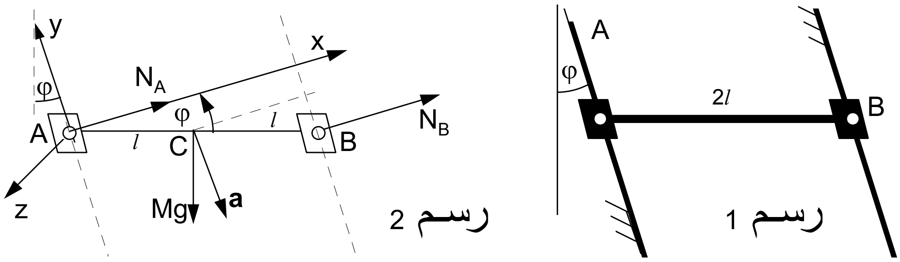
أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سـؤال م 9.8

ينزلق قضيبٌ متجانسٌ، كتلته M، بواسطة منزلقين أملسين يحملانه على قضيبين متوازيين وثابتين في المستوى الرأسي، ويميلان بالزاوية $\varphi = 15°$ عن الرأسي. أوجد تسارع القضيب وردي فعل المنزلقين A و B للوضع المبين في الشكل المرافق، وذلك بإهمال وزني المنزلقين.

الحـــل

نحدد المحاور الديكارتية الثابتة Axyz، Ax يميل بزاوية $\varphi = 15°$ عن الأفقي، Ay منطبقٌ على القضيب الثابت وللأعلى، وAz عموديٌ على المحورين Ax و Ay. نحدد القوى المؤثرة على القضيب وهي قوة وزنه Mg للأسفل، ردّا فعل المنزلقين N_A و N_B على القضيب، وهما متعامدان على القضيبين الثابتين لعدم وجود الاحتكاك. معادلات حركة القضيب قياساً على المعادلات 27.8 و 29.8



شــكل م 9.8

$$\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + M\,\mathbf{g} = M\,\mathbf{a} \qquad 1$$

$$\mathbf{M}_C = 0 \qquad 2$$

ومن المعادلة 1 تنتج المعادلتان القياسيتان

$$\boldsymbol{i}: \quad N_A + N_B - M\,g \sin\varphi = 0 \qquad 3$$

$$\boldsymbol{j}: \quad -M\,g\,\cos\varphi = M\,a_y \qquad 4$$

بينما تعطي معادلة العزم حول مركز كتلة القضيب C المعادلة

$$N_A\,l\sin\varphi - N_B\,l\sin\varphi = 0 \qquad 5$$

حيث $l\sin\varphi$ أقصر مسافة عمودية من مركز الكتلة إلى خطي عمل ردي الفعل $\mathbf{N}_A$ و $\mathbf{N}_B$. حل المعادلات الثلاث الأخيرة يبين أن

$$N_A = N_B = 0.5\,M\,g\sin\varphi\,, \qquad a_y = -\,g\cos\varphi$$

$$\mathbf{N}_A = \mathbf{N}_B = 0.5\,M\,g\sin\varphi\,\boldsymbol{i}\,, \qquad \mathbf{a} = -\,g\cos\varphi\,\boldsymbol{j}\ \ [m/s^2] \qquad 6$$

ســؤال م 10.8

تؤثر على قضيبٍ متجانسٍ يتواجد على سطحٍ أفقيٍ أملس قوة الشد الناتجة من الثقل D المربوط بحبلٍ خفيف وعبر بكرةٍ ملساء وعديمة الوزن أيضاً، بينما تؤثر على القضيب من الجهة الأخرى القوتين **F** و **P**. إذا كانت F = 80 نيوتن وكتلة القضيب 50 كيلوغرام بينما كتلة الثقل D، 30 كيلوغرام، فأوجد القوة **P** اللازمة لجعل حركة القضيب انتقالية وفي المستوى الأفقي.

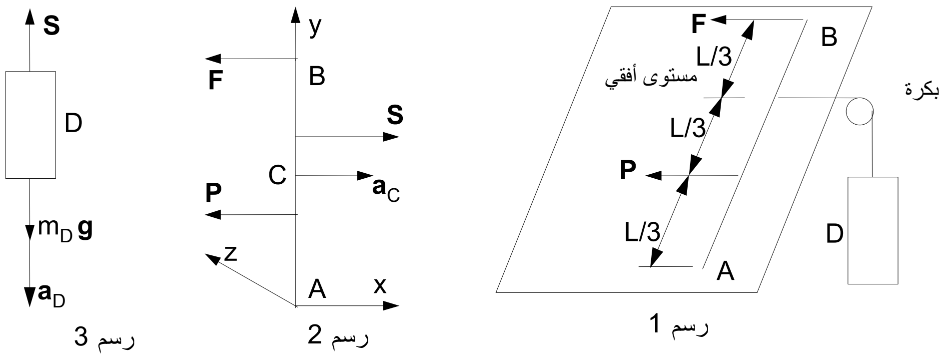
الحـــــل

نحدد محاور الإحداثيات Axyz ، رسم **2** . وبالتطبيق المباشر للمعادلة 27.8 ينتج أن

$$\mathbf{S} + \mathbf{F} + \mathbf{P} = M\,\mathbf{a} \qquad 1$$

بينما معادلة عزوم القوى الخارجية حول المحور Cz المار بمركز الكتلة C، معادلة 29.8

$$\mathbf{M}_{Cz} = 0 \qquad 2$$



شـــكل م 10.8

حيث تعطي المعادلتان 1 و 2 المعادلات القياسية

$$S - F - P = M a_x \quad (3)$$

$$- P L/6 + F L/2 - S L/6 = 0 \quad (4)$$

$$P = 3F - S \quad (5)$$

ومن حركة الثقل D ، **رســـم 3** ، وحيث إن $a_x = a_D$

$$m_D g - S = m_D a_x$$

أو بدلالة الشد

$$S = m_D (g - a_x) \quad (6)$$

حيث يعطي حلُّ المعادلات الثلاثة الأخيرة 3 - 6

$$P = 3F - m_D (g - a_x)$$

$$a_x = a_D = \frac{2 m_D g - 4F}{M + 2 m_D}, \qquad a_x = 2.44 \, [\mathrm{m/s^2}] \quad (7)$$

$$\mathbf{a}_x = 2.44 \, \boldsymbol{i} \, [\mathrm{m/s^2}], \quad \mathbf{S} = 220.8 \, \boldsymbol{i} \, [\mathrm{N}], \quad \mathbf{P} = -19.2 \, \boldsymbol{i} \, [\mathrm{N}] \quad (8)$$

ســـؤال م 11.8

يدفع فتىً صندوقاً متجانساً ، كتلته m على سطحٍ أفقي خشن بقوة **P**. إذا كان معامل الاحتكاك بين الصندوق والسطح μ، فهل يحدث انقلابُ للصندوق عند تحركه لليمين بتسارعٍ a؟ وإذا حدث ذلك فما مقدار القوة P؟

الـــحـــل

يبين **رسم 2** القوى المؤثرة على الصندوق لحظة تحركه الانتقالي لليمين بالتسارع $\mathbf{a} = a\,\boldsymbol{i}$. وهي قوة الوزن **mg** للأسفل، والقوة **P** للأمام، وقوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mu$ للخلف، وكذلك قوة رد الفعل **N** من السطح على الصندوق وللأعلى، آخذين بعين الاعتبار الفرضية التي تقول إن الصندوق لا ينقلب، بل ينزلق (يتحرك) على السطح الأفقي انتقالياً. معادلات حركة الصندوق

$$F_x = M a_x \quad (1)$$

$$F_y = M a_y \quad (2)$$

$$M_{cz} = 0 \quad (3)$$

وبتعويض مركبات القوى المؤثرة على النظام و $a_x = a$ بينما $a_y = 0$ يكون

$$P - F_\mu = m\,a \qquad 4$$

$$N - m\,g = 0 \qquad 5$$

$$N\,x - P\,h - F_\mu\,H/2 = 0 \qquad 6$$

نحسب رد الفعل من المعادلة 5

$$N = m\,g \qquad 7$$

وبالتالي فقوة الاحتكاك

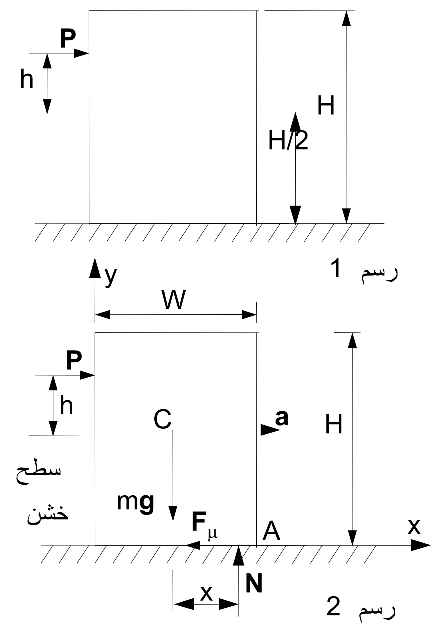
$$F_\mu = \mu\,m\,g \qquad 8$$

والتي بتعويضها في المعادلة 4 ينتج أن قوة الدفع

$$P = m\,(\mu\,g + a) \qquad 9$$

وأخيراً، إذا استبدلنا كلاً من قوة رد الفعل N وقوة الاحتكاك F_μ وقوة الدفع P من المعادلات 7-9 ، فإن حلّ المعادلة 6 بدلالة x يعطي

$$x = \mu\,(h + 0.5\,H) + a\,h/g \qquad 10$$



شـــكل م 11.8

ومن الأهمية بمكان معرفة أقلُّ قيمةٍ للارتفاع h حتى نؤثر على الصندوق بالقوة الأفقية **P** المكافئة للمعادلة 9 حتى يكون على وشك الدوران حول حافته اليمنى A، أو حتى ينقلب. ومن أجل تسهيل وفهم العملية على القاريء، ننطلق من القيم المحددة التالية $\mu_s = 0.2$، $\mu_d = 0.186$، $m = 50$ كيلو غرام، $a = 0.27g$، الارتفاع $H = 2$ متر، بينما العرض $W = 0.96$ متر . ولذلك نحسب القيم التالية من المعادلات 7-9

$$N = 50 \times 9.8 = 490[N] \qquad 12$$

$$P = 50\,(0.186 + 0.27)\,9.8 = 223.4\,[N] \qquad 13$$

بينما الإزاحة الأفقية لنقطة تأثير قوة رد الفعل عن منتصف الصندوق

$$x = \mu_d\,(h + 0.5\,H) + a\,h/g \qquad 14$$

ويتطلب انقلاب الصندوق تحت تأثير قوةِ الدفع P ، معادلة 13 ، دورانَه حول حافته اليمنى A ، $x > W/2 = 0.48\,[m]$ بينما يتطلب كونه على وشك الدوران حول نفس الحافة أن يُستوفى الشرط الآخر $x = W/2 = 0.48\,[m]$ ، وعليه نكتب للحالة الحرجة من المعادلة 14

$$0.48 = 0.186\,(h + 0.5 \times 2) + 0.27\,h \qquad 15$$

لنجد أن الارتفاع

$$h = 0.645\,[m] \qquad 16$$

أي يكون الصندوق على وشك الانقلاب عندما يُستوفى الشرط 16 ، بينما ينقلب الصندوق فعلاً عندما يستوفى الشرط التالي

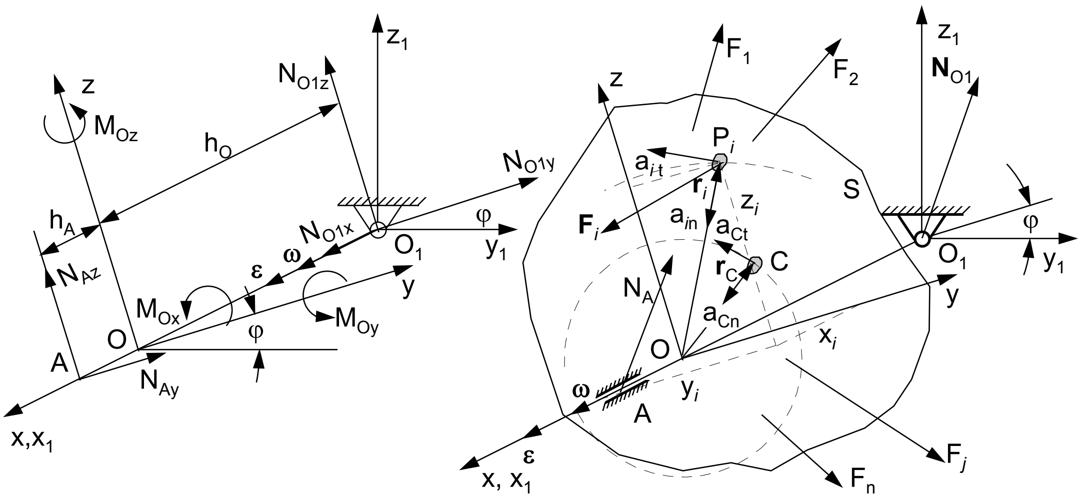
$$h > 0.645\,[m] \qquad 17$$

وعندها يكون الحل 7-9 خاطئاً.

2.6.8 الحركة الدورانية حول محورٍ ثابت

عندما تكون حركة الجسم الجاسئ دورانيةً حول محورٍ ثابت، فإن كل جسيماته تتحرك في مداراتٍ دائريةٍ وحول المحور نفسه. **شكل 6.8** يبين أن الجسم الجاسئ، مركز كتلته C يدور حول المحور الثابت O_1x_1، من إطار الإسناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$، بينما يُثبت إطار الإسناد المتحرك Oxyz في الفراغ إلى النقطة O، كنقطة تقاطع محور الدوران مع المستوى الذي يتحرك فيه مركز الكتلة، أي المستوى Oyz. وبالتالي فإن كلاً من المحورين Ox و O_1x_1 متسامتان.

وفي العادة، لتسهيل عملية اشتقاق المعادلة التفاضلية لدوران الجسم الجاسئ حول محورٍ ثابتٍ، يُحَدَّد المقطع الرقيق S متعامداً مع محور الدوران وشاملاً للمركز O. متَّجِها السرجهة الزاوية للجسم الجاسئ ω وتسارعه الزاوي ε يوازيان محور الدوران O_1x_1، $\omega = \omega\boldsymbol{i}$ و $\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{i}$. وبالتالي يدور مركز الكتلة في مسارٍ دائري، نصف قطره $\mathbf{r}_C$ وبتسارعٍ عمودي $\mathbf{a}_{Cn}$ و مماسي $\mathbf{a}_{Ct}$. وحتى تتحقق صحة المعادلة 10.8 للحركة الدورانية، نضيف لمحصلة القوى المؤثرة محصلة ردود الأفعال $\mathbf{N}$، $\mathbf{N}=\mathbf{N}_A+\mathbf{N}_{O1}$. فنكتب



شكل 6.8

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_{O1} = M(\mathbf{a}_{Cn} + \mathbf{a}_{Ct}) \qquad 30.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ . وباختيار جسيمٍ ما بشكلٍ اعتباطيّ ، كتلته m_i ، و $\mathbf{r}_i$ ، متجه موضعه $\mathbf{r}_i = x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}$ ، فإن تسارعه بالنسبة إلى مركز الإحداثيات المتحركة O وفقاً للمعادلة 62.2

$$\mathbf{a}_i = \varepsilon \times \mathbf{r}_i + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_i) = -(y_i\,\omega^2 + z_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} + (y_i\,\varepsilon - z_i\,\omega^2)\,\boldsymbol{k} \qquad 31.8$$

العزم الرئيسي

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{O\,i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 32.8$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} [x_i\,\boldsymbol{i}+y_i\,\boldsymbol{j}+z_i\,\boldsymbol{k}] \times m_i\,[-(y_i\,\omega^2+z_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} + (y_i\,\varepsilon - z_i\,\omega^2)\,\boldsymbol{k}] + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1}$$

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i\,(y_i^2 + z_i^2)\,\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i z_i\, \omega^2 - x_i y_i\, \varepsilon)\,\boldsymbol{j} +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i y_i\, \omega^2 + x_i z_i\, \varepsilon)\,\mathbf{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 1.33.8$$

أو بصيغة تكاملية

$$\mathbf{M}_O = [\varepsilon \int_M (y^2 + z^2)\,dm]\,\boldsymbol{i} + [\,\omega^2 \int_M xz\,dm - \varepsilon \int_M xy\,dm\,]\,\boldsymbol{j}$$

$$-[\,\omega^2 \int_M xy\,dm + \varepsilon \int_M xz\,dm\,]\,\boldsymbol{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 2.33.8$$

وبينما يمثل التكامل (المجموع) الأول عزم قصور الجسم الجاسئ حول المحور Ox يمثل التكاملان (المجموعان) الآخران عزمي القصور النابذين بالنسبة للمحاور المناظرة

$$I_{xy} = \int_M xy\,dm\,,\; I_{xz} = \int_M xz\,dm$$

وبالتالي تؤول المعادلات 33.8 إلى الشكل المقتضب التالي

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon\, I_x\, \boldsymbol{i} + [\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{xy}]\,\boldsymbol{j} - [\omega^2 I_{xy} + \varepsilon\, I_{xz}]\,\boldsymbol{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 34.8$$

ومن الأهمية بمكان دراسة الحالة التي يكون فيها مستوى الحركه Oyz مستوى تماثل للجسم الجاسئ، ومحور الدوران يمر في مركز الكتلة C. عندئذٍ يتلاشى مُتَّجِهُ الموضع $\mathbf{r}_C$ لمركز الكتلة وكلٌّ من عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz}، أي أن $\mathbf{r}_C=0$، $I_{xy}=0$ و $I_{xz}=0$. وتؤول المعادلتان 30.8 و 34.8 إلى الشكل التالي

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_{O1} = 0 \qquad 1.30.8$$

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon\, I_x\, \boldsymbol{i} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 1.34.8$$

الذي يمكننا استخدام هذه المعادلات في تحديد قيم ردود الأفعال الديناميكية في الدّعامات والحوامل ونقاط الإرتكاز.

أســـــئـلــة مـحــلــولــة

ســـؤال م 12.8

يدور قضيبٌ متجانسٌ، كتلته 5 كيلوغرام، وطوله 2 متر حول المحور الأفقي Ax. أوجد تسارع القضيب ورد فعل القائم A، عندما يصنع الزاوية $\varphi = 30^o$ مع الرأسي وتكون سرعته الزاوية 6 دائرية لكل ثانية.

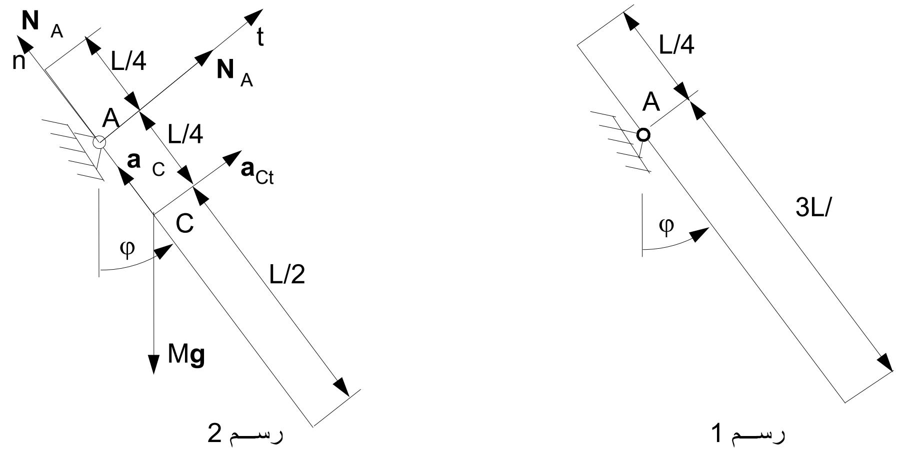
الـــحـــل

نحدد محاور الإحداثيات الطبيعية Ant، An متسامتاً مع القضيب و At عمودي عليه. نحدد تسارع القضيب بتسارع مركز كتلته C

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Ct} + \mathbf{a}_{C\,n} \qquad 1$$

يؤثر على القضيب قوة وزنه **mg** للأسفل ورد فعل القائم A

$$\mathbf{N}_A = \mathbf{N}_{At} + \mathbf{N}_{An} \qquad 2$$



شــكل م 12.8

وبالتطبيق المباشر لمعادلات الحركة الدورانية 30.8 و 32.8 نجد أن

$$M\mathbf{g} + \mathbf{N}_{At} + \mathbf{N}_{An} = M(\mathbf{a}_{Cn} + \mathbf{a}_{Ct}) \qquad 3$$

$$\mathbf{M}_{Ax} = I_{Ax}\,\varepsilon\,\boldsymbol{i} \qquad 4$$

فنكتب المعادلة 3 كمعادلتين قياسيتين

$$-Mg\cos\varphi + N_{An} = M a_{Cn} \qquad 5$$

$$-Mg\sin\varphi + N_{At} = M a_{Ct} \qquad 6$$

وبعد استبدال I_{Ax} كعزم قصور القضيب حول محور الدوران Ax ، أنظر معادلة 18.II

$$I_{Ax} = I_{Cx} + M(AC)^2 = ML^2/12 + M(L/4)^2$$

$$I_{Ax} = 7ML^2/48$$

نعيد كتابة معادلة (العزوم) 4

$$-mg\frac{L}{4}\sin\varphi = \frac{7}{48}mL^2\,\varepsilon \qquad 7$$

المعادلات 5-7 ذات ثلاثة مجاهيل هي رد الفعل **N** والتسارع الزاويّ ε . وهذا الأخير تتحد قيمته مباشرةً من المعادلة 7

$$\varepsilon = -4.2\ [s^{-2}] \qquad 8$$

$$a_{Ct} = \frac{L}{4}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{Ct} = -2.1\ [m/s^2] \qquad 9$$

بينما يحدد التسارع العمودي بالعلاقة

$$a_{Cn} = R\dot{\varphi}^2 = 0.5\times 6^2 = 18[m/s^2]$$

أمّا ردّا الفعل فنحسبها من المعادلتين 5 و 6

$$N_{An} = 132.4\ [N]\ ,\ \ N_{At} = 14\ [N]$$

3.6.8 الحركة المستوية Plane Motion

تُعرف حركة الجسم الجاسئ بالمســتوية إذا كانت كل جســيماته تتحرك في مســــــتويات موازيةٍ لمســتوىً محددٍ وثابت. وبالعادة ، ومن أجل فهم واستيعاب هذه الحركة نفترض في الجسم الجاسئ مقطعاً رقيقاً S، موازياً للمستوى الإحداثي الثابت $O_1y_1z_1$ من إطار الإسناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$ وشاملاً لمركز الكتلة C. كما تتسامت مع المقطع S كل القوى المؤثرة ومتّجهات السرجهة والتسارع المفترضة، **شــكل 7.8**. نثبت في الفراغ إطار الإسناد المتحرك Axyz، إلى المركز (النقطة) A، بحيث يكون المحوران O_1x_1 و Ax متوازيين، والحركة الدورانية تتم حول المحور Ax.

وكما هو معروفٌ من الكينماتيكا، تتحدد حركة الجسم الجاسئ المستوية بثلاث درجات حرية، أي ثلاث حركاتٍ مستقلةٍ بعضها عن بعض. وحيث إن الحركة المستوية هي حركةٌ مركبةٌ من حركتين: انتقالية ودورانية، والحركة بمجملها تتم في مستوى، فإن تحديد قيمتي الإحداثيين x_A و y_A لمركزه كافيان لتحديد الحركة الانتقالية. ولذلك نكتب

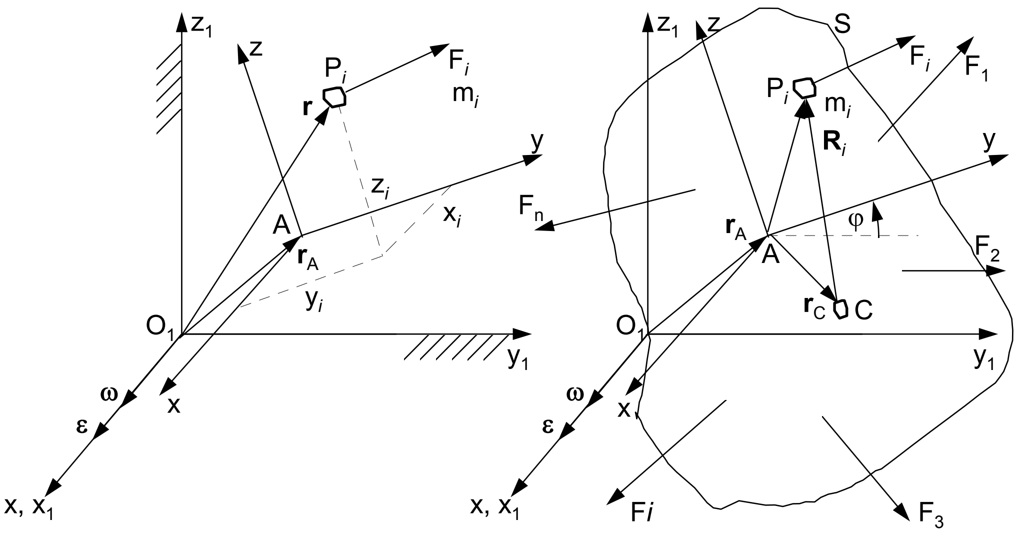
$$\mathbf{F} = M(\ddot{y}_A \boldsymbol{j} + \ddot{z}_A \boldsymbol{k}) \qquad 35.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ. ويتحدد جزء الحركة الدوراني بالبارامتر المستقل φ كزاوية دورانٍ وحيدةٍ ومفردة. وتبعاً لذلك، نُحدّد متّجهَي السرجهة الزاوية والتسارع الزاوي، $\omega = \omega\,\boldsymbol{i}$ و $\varepsilon = \varepsilon\,\boldsymbol{i}$. وكما هو الحال في الحركة الدورانية، نختار جسيماً منفرداً من جسيمات الجسم الجاسئ في المقطع S كتلته m_i، ومتّجِه موضعه $\mathbf{r}_i$، $\mathbf{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$. وباستبدال التسارع $\mathbf{a}_i$، انظر المعادلة 1.74.2

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \mathbf{r}_i + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_A - (y_i\,\omega^2 + z_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} + (y_i\,\varepsilon - z_i\,\omega^2)\,\boldsymbol{k} \qquad 36.8$$

في معادلة العزم الرئيسي ينتج أن



شــكل 7.8

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \qquad 37.8$$

أو

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}_{C)} \times m_i \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_{i\,t} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_{i\,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} m_i [(y_i^2+z_i^2)\,\varepsilon\, \boldsymbol{i}$$

$$+ (x_i z_i \omega^2 - x_i y_i \varepsilon)\boldsymbol{j} - (x_i y_i \omega^2 - x_i z_i \varepsilon)\mathbf{k}] \qquad 1.38.8$$

أو بصيغة تكاملية

$$\mathbf{M}_A = \int_{M_A} d\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_A \int_M dm + \int_M \mathbf{R} \times \mathbf{a}_A dm + [\varepsilon \int_M (y^2 + z^2)\, dm]\boldsymbol{i}$$

$$+ [\omega^2 \int_M xz\, dm - \varepsilon \int_M xy\, dm]\boldsymbol{j} - [\omega^2 \int_M xy\, dm + \varepsilon \int_M xz\, dm]\boldsymbol{k} \qquad 2.38.8$$

التكامل الأول وفقاً للمعادلة 3.8

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_A \int_M dm = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{a}_A$$

بينما التكامل الثاني يساوي الصفر

$$\int_M \mathbf{R} \times \mathbf{a}_A dm = \mathbf{R} \times M\, \mathbf{a}_A = 0$$

لأنَّ R تقاس بالنسبة إلى مركز الكتلة ، إذ يناظر كلُّ حدٍ في أحد نصفي الصفيحة S حداً آخر مساوياً له في المقدار ومختلفاً معه بالإشارة . وهذا يؤدي إلى تلاشي تأثير التكامل المذكور ، أي أن التكامل يساوي صفراً .
عزم قصور الجسم الجاسئ حول المحور Ax

$$I_{Ax} = \sum_{i=1}^{n} m_i [(y_i^2+z_i^2) = \int_M (y^2 + z^2)\, dm$$

بينما عزوم القصور النابذة للجسم الجاسئ نسبةً للمحاور المتحركة Axyz

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = \int_M xy\, dm, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = \int_M xz\, dm$$

وعليه تُكتب المعادلتان 38.8 بالشكل المختصر التالي

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times M\, \mathbf{a}_A + \varepsilon I_{Ax} \boldsymbol{i} + [\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{xy}]\boldsymbol{j} - [\omega^2 I_{xy} + \varepsilon I_{xz}]\boldsymbol{k} \qquad 39.8$$

والتي تمثل مع المعادلة 35.8 معادلات حركة الجسم الجاسئ المستوية إذا كان محور الدوران يمر في نقطةٍ اعتباطيةٍ ليست مركز الكتلة. أمَّا إذا كان جزء الحركة الدورانية يتم حول محور يمر عبر مركز كتلة الجسم الجاسئ فإن $\mathbf{r}_C=0$ ، وتبعا لذلك تؤول المعادلة 39.8 إلى الشكل الأبسط التالي

$$\mathbf{M}_C = \varepsilon I_{Cx} \boldsymbol{i} + [\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{xy}]\boldsymbol{j} - [\omega^2 I_{xy} + \varepsilon I_{xz}]\boldsymbol{k} \qquad 40.8$$

وتبعاً لذلك، تُستَوْفَى الحركة المستوية للجسم الجاسئ بالمعادلة 35.8، التي تمثل قانون نيوتن الثاني للجسم الجاسئ، مضافاً لها إحدى المعادلتين الاتِّجاهِيَّتين 39.8 أو 40.8. ومن الطبيعي أن المعادلتين الأخيرتين تمثلان العلاقة بين العزم الرئيسي للقوى حول المحور Ax أو المحور Cx بدلالة مميزات الحركة الدورانية، التسارع الزاويّ ε والسرعة الزاوية ω وخصائص الجسم الجاسئ كالتماثل أو عدمه. ولأن عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} يبينان مقدار عدم تماثل لجسم الجاسئ حول مستوى الحركة Ayz (أو Cyz)، فإنَّ تماثل الجسم الجاسئ حول أيٍ من المستويين المذكورين أعلاه ليجعل عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} مساويين للصفر، $I_{xy} = I_{xz} = 0$. وعندئذٍ تؤول المعادلتين الأخيرتين إلى الشكل التالي

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times M\,\mathbf{a}_A + \varepsilon I_{Ax}\,\boldsymbol{i} \qquad 1.39.8$$

$$\mathbf{M}_C = \varepsilon I_{Cx}\,\boldsymbol{I} \qquad 1.40.8$$

ومن الأهمية بمكان دراسة الحالة التي يكون فيها مستوى الحركة Ayz مستوى تماثل للجسم الجاسئ، مضافاً إلىذلك أن محور الدوران يمر في مركز الكتلة C. عندئذٍ يتلاشى مُتَّجِهُ الموضع $\mathbf{r}_C$ لمركز الكتلة، وعزما القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} مساويين للصفر، أي أن $\mathbf{r}_C = 0$ و $I_{xy} = I_{xz} = 0$. وتؤول المعادلتان 35.8 و39.8 قياسياً إلى الشكل التالي

$$F_x = 0\,,\ F_y = M\,\ddot{y}_{Ay}\ ,\ F_z = M\,\ddot{y}_{Az} \qquad 1.35.8$$

$$M_{Ax} = \varepsilon I_{Ax}\,,\ M_{Ay} = 0\,,\ M_{Az} = 0 \qquad 2.40.8$$

أسـئلـة مـحـلـولــة

ســؤال م 13.8

تحتاج عجلة مدحلةٍ متجانسةٍ، كتلتها 400 كيلوغرام إلى قوةٍ أفقيةٍ مقدارها F = 1 كيلو نيوتن حتى تُقتِّن العتبة A بالصعود فوقها. ارتفاع العتبة 8 ســنتيمترات، وتؤثر القوة الأفقية عبر قضيبٍ ناقلٍ للحركة مربوطٌ مع محور العجلة باحكام. أوجد تســارع العجلة الابتدائي ورد فعل العتبة.

الــحــل

حركة عجلة المدحلة حركةٌ مستويةٌ . فهي بالإضافة لدورانها حول المحور المار في مركزها تتحرك إنتقالياً لليمين. نحدد المحاور الطبيعية Ant والمحور Ax عمودي على المحورين n و t. ونحدد القوى المؤثرة على العجلة وهي قوة وزنها **Mg** للأسفل ورد فعل السطح $\mathbf{N}_B$ للأعلى في النقطة B وأيضاً رد فعل العتبة $\mathbf{N}_A$ في النقطة A وباتجاه مركز العجلة C

$$\mathbf{N}_A = \mathbf{N}_{At} + \mathbf{N}_n$$

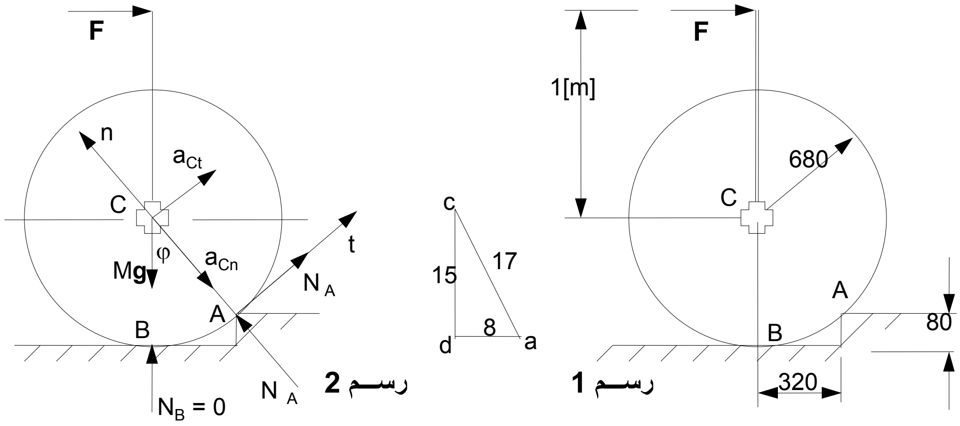
كما يتحدد تسارع مركز العجلة بالمركبتين ، العمودية والمماسية

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{Ct} + \mathbf{a}_{Cn}$$

نكتب معادلات حركة العجلة الدورانية ، معادلة 35.8 وللإحداثيين n و t

$$M\,a_{Cn} = M g \cos\varphi - N_{An} + F \sin\varphi \qquad 1$$

$$M\,a_{Ct} = -M g \sin\varphi + N_{At} + F \cos\varphi \qquad 2$$



شـــكل م 13.8

ومن الطبيعي أن يتلاشى رد الفعل N_B في اللحظة التي تصعد فيها المدحلة على العتبة A، $N_B = 0$. أما المعادلة الثالثة فيمكن الحصول عليها من معادلة عزوم القوى حول المحورِ Ax . فنكتب قياساً على المعادلة 2.39.8

$M_{Ax} = I_{Ax}\,\varepsilon$

$1.6\,F - 0.32\,M\,g \;=\; 1.5\,M\,R^2\,\varepsilon$ 3

حيث إن I_{Ax} عزم قصور العجلة حول المحور Ax

$I_{Ax} = 0.5\,M\,R^2 + M\,R^2 \;\Rightarrow I_{Ax} = 1.5\,M\,R^2$

وباستبدال القيم F=1[kN] ، M=400[kg] و R=0.68[m] في المعادلة 3 نجد التسارع الزّاويّ

$\varepsilon \;=\; 1.24\ [rad/s^2]$ 4

والتسارع المماسي والعمودي، معادلات 64.2

$a_{C\,t} \;=\; R\,\varepsilon = 0.68 \cdot 1.24 \;=\; 0.85\ [m/s]$ 5

$a_{C\,n} = \;R\,\omega^2 = 0$ 6

لأن سرعة مركز العجلة الابتدائية صفراً، $v_C=0$. وباستبدال قيم مركبات التسارع من المعادلات4 - 6 في المعادلتين 1و 2 نجد رد فعل العتبة

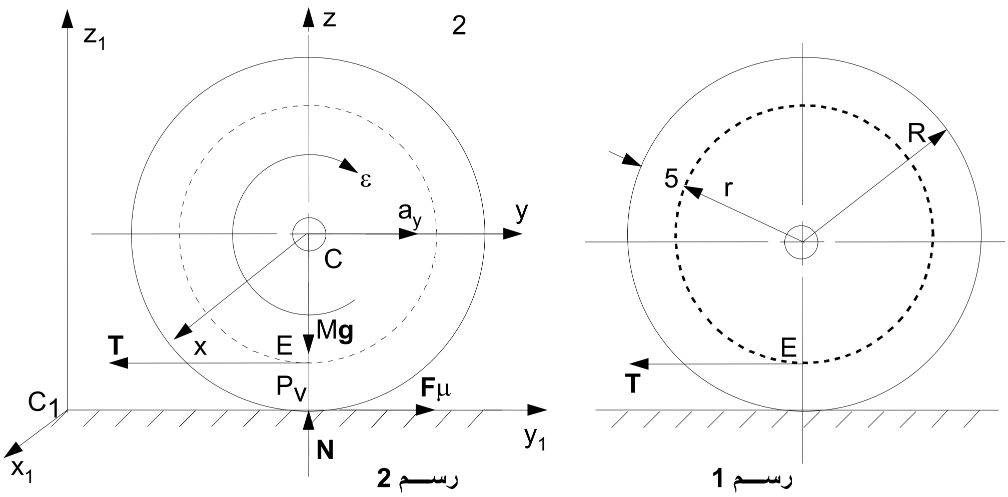
$N_{An} \;=\; 2930\ [N]\ ,\ N_{At} \;=\; 1300\ [N]$

ســؤال م 14.8

إسطوانةٌ متجانسةٌ، m = 32 كيلوغرام، وR = 0.25 متر، ذات تجويفٍ محيطي منتظم وضيق، عمقه 50 مليمتراً، يسمح لحبلٍ عديمَ الوزن والاستطالة بالالتفاف حولها. إذا تدحرجت الإسطوانة دون انزلاقٍ على سطحٍ أفقي، أوجد تســارع مركزها، وما معامل الاحتكاك اللازم بينها والســطح الأفقي. أهمل تأثير التجويف على عزم القصور، والقوة تشد الحبل أفقياً بقوة T = 100 نيوتن.

الـــحـــل

نحدد المحاور الثابتة $C_1x_1y_1z_1$ والمتحركة Cxyz. نحدد القوى المؤثرة على هذا النظام، وزن الإسطوانة **Mg** للأسفل، رد فعل السطح الأفقي **N** للأعلى، وقوة الاحتكاك الانزلاقي **Fμ** في نقطة التلامس P_v بين سطح الإسطوانة والسطح الأفقي وبعكس الحركة. قانون نيوتن لحركة مركز الإسطوانة ولمستوى الحركة Cyz، وفْقَاً للمعادلات 35.8



شكل م 14.8

$$F_\mu - T = M\ddot{y}_C \qquad 1$$

$$N - M g = M\ddot{z}_C = 0 \Rightarrow N = M g \qquad 2$$

بينما معادلة العزم الرئيسي معادلة 1.40.8

$$M_{Cx} = I_{Cx}\,\varepsilon \Rightarrow r\,T - R\,F_\mu = I_{Cx}\,\varepsilon \qquad 3$$

حيث أن I_{Cx} عزم قصور الإسطوانة حول المحور Cx

$$I_{Cx} = 0.5\,M\,R^2 = 1\ [kg\ .m^2] \qquad 4$$

و ε التسارع الزاوي للإسطوانة

$$\varepsilon = \frac{\ddot{y}_C}{R} = 4\ddot{y}_C \qquad 5$$

وباستبدال عزم القصور من المعادلة 4 و ε من المعادلة 5 ، وتعويض قيمهما في المعادلة 3 ، ثُمَّ ربط الناتج مع المعادلة 1 ينتج مركبة التسارع الرأسية وقوة الاحتكاك

$$\ddot{y}_C = -0.416\ [m/s^2] \qquad 6$$

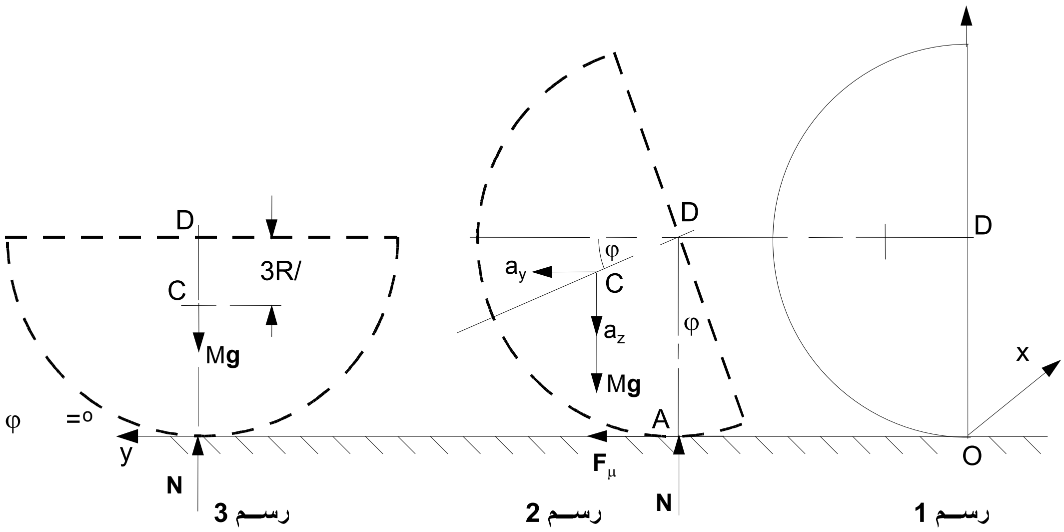
$$F_\mu = 86.66\ [N] \qquad 7$$

ولنجد من المعادلة الأخيرة معامل الاحتكاك

$$\mu = \frac{F_\mu}{Mg} = \frac{86.66}{32 \times 9.8} = 0.276 \qquad 8$$

سـؤال م 15.8

نصف كرةٍ مصمتةٍ، كتلتها M، ونصف قطرها R، تُرِكَت تتدحرج على سطحٍ أفقي خشن من وضع السكون الابتدائي، **رسم 1**. اكتب تعبيراً للسرعة الزاوية φ، **رسم 2**، وما قيمة السرعة الزاوية عندما يدور الجسم 0.25 دورة، **رسم 3**؟ اعتبر التدحرج بدون انزلاق.



شكل م 15.8

الحل

نحدد محاور الإحداثيات الثابتة Oxyz ونحدد الزاوية φ لتعرف ميل خط التماثل DC عن الأفقي. القوى المؤثرة على نصف الكرة هي : قوة الوزن **Mg** للأسفل ، ورد فعل السطح **N** على نصف الكرة في نقطة التلامس A. ولان الحركة تعرف فقط في المستوى الرأسي Oyz فإن قانون نيوتن الثاني لحركة مركز الكتلة C يكتب بالمعادلتين القياسيتين

$$M\ddot{y}_C = F_\mu \qquad 1$$

$$M\ddot{z}_C = N - Mg \qquad 2$$

لعزم الرئيسي للقوى المؤثرة حول مركز الكتلة C، معادله 1.40.8

$$M_{Cx1} = I_{Cx1}\,\ddot{\varphi}$$

$$I_{Cx1}\,\ddot{\varphi} = N\,a\cos\varphi - F_\mu\,(R - a\sin\varphi) \qquad 3$$

حيث I_{Cx1} عزم القصور المحوري لكتلة نصف الكرة حول المحور Cx

$$I_{Cx1} = \frac{83}{320}MR^2 \qquad 4$$

إحداثيات مركز الكتلة C، رسم 2

$$y_C = R\varphi + a\cos\varphi \qquad 5$$

$$z_C = R - a\sin\varphi \qquad 6$$

وبمفاضلتهما مرتين

$$\ddot{y}_C = (R - a\sin\varphi)\,\ddot{\varphi} - a\cos\varphi\,\ddot{\varphi}^2 \qquad 7$$

$$\ddot{z}_C = a\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - a\cos\varphi\,\ddot{\varphi} \qquad 8$$

ثمّ تعويض هذا الناتج في المعادلتين 1 و 2

$$F_\mu = M\ddot{y}_C = M\left\{(R - a\sin\varphi)\,\ddot{\varphi} - a\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right\} \qquad 9$$

$$N = M(\ddot{z}_C + g) = M\left\{a\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - a\cos\varphi\,\ddot{\varphi} + g\right\} \qquad 10$$

أخيراً إذا عوضنا عزم القصور I_{Cx1} من المعادلة 4 وقوتا الاحتكاك ورد الفعل من المعادلتين 9 و 10 في المعادلة الرئيسة 3 نحصل على المعادلة

$$\frac{83}{320}R^2\,\ddot{\varphi}=\left\{a\ \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2-a\cos\varphi\,\ddot{\varphi}+g\right\}a\cos\varphi$$
$$-(R-a\sin\varphi)\left\{(R-a\sin\varphi)\,\ddot{\varphi}-a\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\right\}$$

أو

$$\left\{\frac{83}{320}+\left\{\frac{a}{R}\right\}^2\cos^2\varphi+\left\{1-\left\{\frac{a}{R}\right\}\sin\varphi\right\}^2\right\}\ddot{\varphi}-\left\{\frac{a}{R}\right\}^2\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2=\frac{a}{R}\frac{g}{R}\cos\varphi$$

ولأن $\frac{a}{R}=\frac{3}{8}$ نستطيع كتابة المعادلة السابقة بالترتيب التالي

$$(56-30\sin\varphi)\,\ddot{\varphi}\;=\;15\cos\;\varphi\left\{\dot{\varphi}^2+\frac{g}{R}\right\} \qquad 11$$

أو

$$\frac{\dot{\varphi}\;d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2+g/R}=\frac{15\;\cos\varphi\,d\varphi}{56-30\;\sin\varphi} \qquad 12$$

حيث استخدمنا العلاقة $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$. وبإجراء التكامل على المعادلة 12 مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية للحركة يكون

$$\dot{\varphi}^2+\frac{g}{R}=\frac{C}{56-30\sin\varphi} \qquad 13$$

حيث تتحدد قيمة الثابت $C\;=\;56\frac{g}{R}$ ، والذي بتعويضه في المعادلة 13 ينتج أن السرعة الزاوية تتحدد بالمعادلة الرياضية

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{15\sin\varphi}{28-15\sin\varphi}} \qquad 14$$

أمّا قيمة السرعة الزاوية عند الدوران ربع دورة ، $\varphi=\pi/2$

$$\dot{\varphi}\Big|_{\varphi=90^o}=\sqrt{\frac{15}{13}\frac{g}{R}} \qquad 15$$

تـــمـــريـــن : حل **السؤال م 15.8** لنصفِ القرص المصمت.

ســؤال م 16.8

تتدحرج إسطوانةٌ منتظمةٌ ومتجانسة، كتلتها M، ونصف قطرها R بدون انزلاق على مستوىً مائل، زاوية ميله عن الأفقي φ. أوجد تسارع مركز الإسطوانة وأقل قيمة لقوة الاحتكاك التي تجعل الإسطوانة تتدحرج بدون انزلاق .

الـــحـــل

حركة الإسطوانة حركةٌ مستوية، مكونة من الحركتين: الانتقالية معرفةٌ بإزاحة مركز كتلتها y_C والدورانية حول محور يمر في مركز كتلتها ومعرفة بالزاوية φ. القوى المؤثرة على الإسطوانة هي، قوة الوزن **Mg** للأسفل، رد فعل السطح المائل **N**

العمودي على الإسطوانة، والمؤثر في نقطة التلامس وأخيراً قوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mu$ المضادة للحركة. معادلات حركة الجسم الجاسيء المستوية 35.8 و 1.40.8

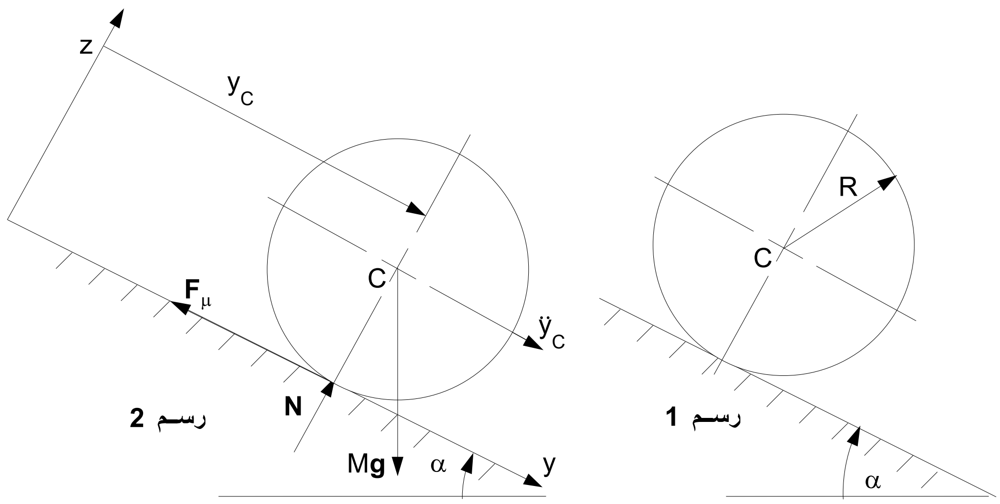
$$M\ddot{y}_C = M g \sin\alpha - F_\mu \qquad 1$$

$$M\ddot{z}_C = - M g \cos\alpha + N \qquad 2$$

بينما معادلة العزوم 41.8

$$M_{Cx1} = I_{Cx1}\,\ddot{\varphi}$$

حيث إن I_{Cx1} عزم قصور الإسطوانة حول المحور العمودي Cx_1 المار بمركز ها، $I_{Cx1} = 0.5\,M R^2$. وتبعاً لذلك تكتب المعادلة الأخيرة بالشكل التالي



شـــكل م 16.8

$$F_\mu R = 0.5MR^2\,\ddot{\varphi} \qquad 3$$

مركز الإسطوانة على نفس البعد من المستوى المائل ، وهذا يعني أن

$$z_C = \text{const.} \Rightarrow \dot{z}_C = \ddot{z}_C = 0$$

ولذلك نحدد رد الفعل من المعادلة 2

$$N = M g \cos\alpha \qquad 4$$

تدحرج الإسطوانة بدون انزلاق على المستوى المائل يعني رياضياً أنّ

$$y_C = R\varphi$$

$$\dot{y}_C = R\dot{\varphi} \;\&\; \ddot{y}_C = R\ddot{\varphi} \qquad 5$$

وبربط معادلة 5 مع معادلة 3 وحل الناتج بدلالة قوة الاحتكاك

$$F_\mu = \frac{MR\ddot{\varphi}}{2} = \frac{M\ddot{y}_C}{2} \qquad 6$$

ويحسب تسارع مركز الإسطوانة بعد استبدال قوة الاحتكاك من المعادلة 6 وتعويضها في المعادلة 1، فنجد أن

$$\ddot{y}_C = \frac{2}{3} g \sin\varphi \qquad 7$$

كما أن ربط المعادلة 7 مع المعادلة 6 يمكننا من حساب رد الفعل

$$F_\mu = \frac{1}{3} Mg\sin\varphi \qquad 8$$

إن قوة احتكاك التدحرج بدون انزلاق للأجسام الإسطوانية أقل من قوة الاحتكاك عند الانزلاق. أي أن

$$F\mu < \mu N \qquad 9$$

حيث μ معامل الاحتكاك الانزلاقي . وباستبدال قوة الاحتكاك F_μ من المعادلة 8 ورد الفعل N من المعادلة 4 في المعادلة 9، نجد أن

$$\mu > \frac{1}{3}\tan\alpha \qquad 10$$

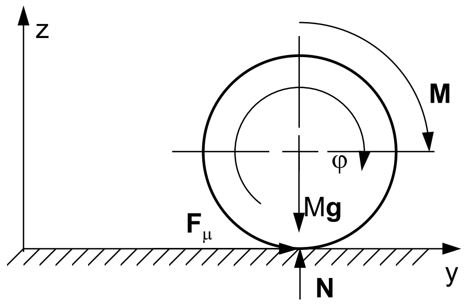
أي يجب أن يكون معامل الاحتكاك أكبر من ثلث ميل السطح حتى تتدحرج بدون انزلاق على هذا السطح الخشن.

تـنـبـيـه: تؤثر قوة احتكاك التدحرج بعكس إزاحة مركز كتلة الإسطوانة إذا تحرك هذا المركز بتسارع ما تحت تأثير قوىً مؤثرة ومعينة. أما إذا أثر على الإسطوانة عزمٌ دورانيّ **M**، **شـكل م 2.16.8**، فإن قوة الإحتكاك التدحرجي $\mathbf{F}_\mu$ توازي إزاحة مركز الكتلة، أي تأخذ اتجاه التسارع نفسه . وتؤول معادلات الحركة 41.8 في هذه الحالة إلى الصيغة التالية

$$M\ddot{y}_C = F_\mu \qquad 11$$

$$M\ddot{z}_C = N - Mg = 0 \qquad 12$$

$$0.5MR^2\,\ddot{\varphi} = M - F_\mu R \qquad 13$$



شـكل م 2.16.8

إن قوة احتكاك التدحرج $\mathbf{F}_\mu$ كقوة خَارِجية نتجت من العزم الدوراني **M** المؤثر على الإسطوانة كقوةٍ مضادةٍ للحركة (الدورانية). وحيث إن حركة الإسطوانة الدورانية لليمين ينتج للتو قوة مضادةٌ من السطح الخشن تمنع دوران الإسطوانة لتلك الجهة.

7.8 الزَّخَمُ الزَّاوِيُ للنظام

لقد ورد مفهوم الزَّخَمُ الزَّاويّ للجسيم في البندين 1.5 و 3.5، وبإضافة الرمز *i* للمعادلة 3.5 فإن الزَّخَمُ الزَّاويّ للجسيم *i*

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

اعتبر فئة من الجسيمات عددها n ، كتلها m_1 ، m_2 ، ..... ، m_n ومتجهات مواضعها $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، .... ،$\mathbf{r}_n$. المجموع الاتجاهي لزِخَام جميع جسيمات الجسم الجاسئ بالنسبة إلى نقطة الأصل يمثل الزخم الزاوي لنظام الجسيمات

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_i \;\Rightarrow\; \mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i)$$

وباستبدال $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i$، **شكل** 2.8، نكتب الزخم الزاوي للنظام

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_C \times m_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad 41.8$$

أو كمجموعين : المجموع الأول، فبعد ترتيبه وربطه بالمعادلة 5.8، يساوي الزخم الزاوي لكتلة النظام M مركزةً في مركز كتلته C عندما تتحرك بالسرجهة $\boldsymbol{v}_C$

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\ \boldsymbol{v}_i = \mathbf{r}_C \times M\ \boldsymbol{v}_C \qquad 1.42.8$$

والمجموع الثاني، نستخدم المعادلة 68.2، والتي تربط بين سرجهتي مركز الكتــلة وسرجهة الجسيم المختار، فنكتب، $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC}$

$$\mathbf{L}_\rho = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\ (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{i\,C}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} + \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_C$$

أو كمجموعين جديدين: أولهما ، يشكل مجموع الزِّخَام الزَّاوِيَّة لكل جسيمات النظام بالنسبة إلى مركز الكتله

$$\mathbf{L}_\rho = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} \qquad 2.42.8$$

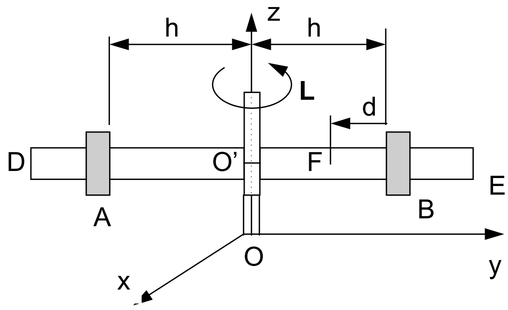
وثانيهما ، حاصل ضرب العزم الاستاتيكي لمجموع كتل جسيمات النظام ومتجهات مواضعها يساوي صفراً، لأن $\mathbf{r'}_C=0$، وأيضاً بالقياس على معادلة 4.8 ، أي أن $\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_C = 0$. وبالتالي يكون الزخم الزاوي الكلي للنظام مساوياً للمجموعين الواردين في المعادلتين 42.8

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} \qquad 43.8$$

هذه المعادلة 43.8 تبين أن **الزَّخَمَ الزَّاوِيُّ للنظام بالنسبة إلى نقطةٍ ثابتةٍ، مركز إطار الإسناد القصوري O، يساوي الزَّخَمَ الزَّاوِيُّ لكتلة النظام الكلية M، مركزةً في مركز كتلته C، عندما تتحرك بسرجهة مركز الكتلة $\boldsymbol{v}_C$، مضافاً إليه مجموع الزِّخَام الزَّاوِيَّة لكل جسيمات النظام بالنسبة إلى مركز كتلة النظام .**

اعتبر الآن ماذا يحدث إذا تغيرت نقطة الأصل للنظام الإحداثي. يتضح من **الشــكل 2.8**، أن متجه الموضع لمركز الكتلة $\mathbf{r}_c$ يتغير، بينما لا تتغير متجهات الموضع النســبية $\mathbf{r}'_i$، كما لا تتغير مشــتقاتها الزمنية. وعلى ذلك ففي التعبير العام للزخم الزاوي للنظام، معادلة 43.8، يعتمد الحد الأول على موقع نقطة الأصل، كنقطة الإســناد لتعريف الزخم الزاوي؛ بينما لا يعتمد الحد الثاني على النقطة المذكورة. وفي سياق ذلك؛ نستطيع ادراج النظرية التالية: **إذا كان مركز كتلة نظام ما من الجسيمات في حالة سكون فإن زَخَمَهُ الزَّاوِيُّ يظل على حاله بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد.** ولإثبات صحة هذه النظرية، سنعتمد الحالة الخاصة فقط التي يكون فيها مركز الكتلة ساكنا. عندئذ يتلاشى الحد الأول في المعادلة 43.8 ويكون الزَّخَم الزَّاوِّي الكلي مساوياً للحد الثاني الذي لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل. وللتعبير عن ذلك بصورة أخرى نقول: **إذا كان مركز الكتلة ساكناً، فإنه يمكن حساب الزَّخَمُ الزَّاويّ بالنسبة إلى أية نقطةِ إسنادٍ وتكون النتيجة واحدةً في جميع الحالات.**

مـثـــال 1.8



شـكـل 8.8

يمكن التدليل على النتيجة العامة السابقةِ بمثالٍ بسيط لنظام مكونٍ من جسيمين فقط ، **شـكـل 8.8** . فالجسيمان A و B متساويا الكتلة ، كتلة كل منهما m ، وسرعته v . وهما على البعد نفسه من مركز كتلهما الساكن O' ، الواقع على المحور Oz . وبذلك يكون مقدار الزَّخمُ الزَّاويَ للجسيمين A و B ، بالنسبة إلى المحور Oz

$$L_A = L_B = m\, v\, h$$

وبما أن للزَّخمين الزَّاويين الاتجاه نفسه ، موازٍ للمحور Oz وللأعلى ، فإن مقداري المتجهين يجمعان عددياً للحصول على المقدار الكلي

$$L = L_A + L_B = 2\, m\, v\, h$$

ويساوي هذا المقدار الزَّخمُ الزَّاويّ الكلي لزوج الجسيمات A و B بالنسبة إلى النقطة الواقعة في منتصف المسافة بينهما. اعتبر الأن نقطة إسنادٍ تقع عند موضع أحد الجسيمين. فلا يكون لهذا الجسيم زخم زاويّ بالنسبة إلى موقعه ذاته $\mathbf{r} = 0$. أما الجسيم الثاني الذي يبعد الآن المسافة 2h، فيكون زخمه الزَّاويّ $2 m v h$ ، ويكون مجموع الزخمين الزاويين $2 m v h$ مرة ثانية . وأخيراً إذا اخترنا النقطة F على الدليل DE بحيث تبعد المسافة d عن الجسيم B. فيكون الزّخمان الزاويّان للجسيمين A و B، بالنسبة إلى هذه النقطة الإسنادية

$$L_A = m\, v\, (2h - d)\,,\; L_B = m\, v\, d$$

ليكون للمجموع مرة أخرى نفس القيمة

$$L = L_A + L_B = m\, v\, (2h - d) + m\, v\, d = 2\, m\, v\, h$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري والزَّخَم الزَّاوِيُّ المِغزَلي

وفْقَاً للمعادلة 43.8 يمكن تقسيم الزَّخَم الزَّاوِيُّ الكلي لنظام ما إلى جزأين مختلفي الشكل تماماً. يحتوي الجزء الأول على الكتلة الكلية فقط والخواص الكينماتيكية لمركزها، ويسمى الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداريّ أو الدوراني Orbital. وأما الجزء الثاني فهو الزَّخَم الزَّاوِيُّ للنظام بالنسبة إلى مركز كتلته؛ ويسمى هذا بالزَّخَم الزَّاوِيُّ المِغزَلي أو غالباً مجرد الغَزْل Spin. ولتلخيص النتائج السابقة باستخدام هذين الإسمين ومعادلة 43.8 نجد أن

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{iC} = \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{spin}$$

حيث إن

$$\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_C \times M\, \boldsymbol{v}_C \qquad 44.8$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري ؛ بينما

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{iC} \qquad 45.8$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المغزلي. والغَزْل هو الزَّخَم الزَّاوِيُّ لنظام محسوباً بالنسبة إلى مركز الكتلة، سواءً كان المركز ساكناً أو متحركاً؛ إذ إنه خاصيةٌ ذاتيةٌ للنظام، مستقلةٌ عن نقطةِ إسـنادِ المشـاهد. فإذا كان جسـمٌ ما- مثلاً خُذْرُوفٌ أو مروحةُ طائرةٍ جاثيةٍ في موقفها- يدور حول محورٍ سـاكنٍ يمر عبر مركز كتلته/ها، فإن زخمه الزَّاوِيَّ يكون مسـاوياً لزخمه الزَّاوِيِّ الكلي. وبصورة أعَمَّ؛ فقد يكون مركز الكتلة متحركاً، وفي هذه الحالة يكون الغَزْل فقط جزءً من المجموع. على كل حال، فإن الغزل ذاته مسـتقلٌ عن الحركة الجِرْمِيَّة. فالزَّخَم الزَّاوِيّ المغزلي للأرض، مثلاً، لا يعتمد على السرعة المدارية للأرض؛ ويحسب كما لو كان محور الأرض ساكناً.

إن التشابه واضح بين المعادلة 44.8 التي تعرف الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري لنظام، والمعادلة 3.5، التي تعرف الزَّخَم الزَّاوِيُّ لجسم مفرد. وعلى ذلك، نستطيع القول إن الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري لنظام يساوي الزَّخَم الزَّاوِيُّ لجسيم، كتلته M مُركَزٌ في مركز الكتلة. ولذلك حتى نحسب الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري للأرض بالنسبة إلى الشمس، مثلاً، تستبدل الأرض بجسيم كتلته كتلة الأرض، M_E، موضوعٌ عند مركزها. وبما أن الزَّخَم الكلي لنظام يساوي $M\boldsymbol{v}_C$، معادلة 29.8، فإنه يمكن تعريف الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري بالعلاقة

$$\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{K}$$

التي تشبه إلى حد كبير المعادلة الواردة في الباب الخامس للجسيم المفرد $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}$. فالزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري، مثله مثل الزَّخَم الزَّاوِيّ لجسيم، يعتمد على نقطة الإسناد المختارة.

مـــثـــال 2.8

دُحْرَاجٌ إسطوانيّ، كتلته m، ونصف قطره R، يتدحرج على سطح أفقي أملس بسرجهة $\boldsymbol{v}$، وبخط سير موازٍ للمحور Oy، **شكل** 9.8. في اللحظة التي تبعد فيها نقطة تلامس الدحراج (مسقط مركز كتلته على المستوى الأفقي) عن نقطة الأصل المختارة O المسافة L، أوجد الزَّخَم الزَّاوِيّ الدوراني والمغزلي، بالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة؟ وما زَخَمَه الزّاويّ الكلي؟

المعطيات : $L = \sqrt{2}$ [m] ، $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{j}$ [m/s] ، $m = 50$ [kg] و $R = 50$ [cm] .

الـــحـــل

نحدِّد خواص مركز الكتلة الكينماتيكية

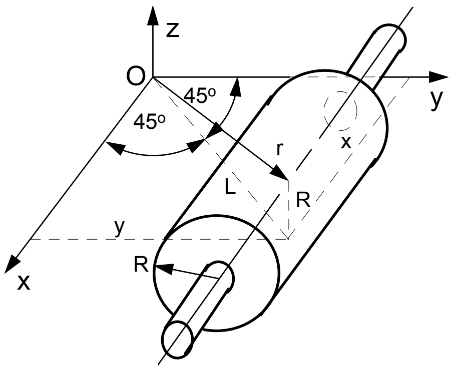
$$\mathbf{r}_C = L\cos 45°\boldsymbol{i} + L\sin 45°\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} = 1.42\cos 45°\boldsymbol{i} + 1.42\sin 45°\boldsymbol{j} + 0.5\boldsymbol{k}$$
$$\mathbf{r}_C = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 0.5\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{v}_C = 2\boldsymbol{j}\ [\text{m/s}]$$

وبذلك يكون الزخم الزاوي المداري ، معادلة 44.8

$$\mathbf{L}_{orb} = M\,\mathbf{r}_C \times \boldsymbol{v}_C = 50\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -50\boldsymbol{i} + 100\boldsymbol{k}\ [\text{kgm}^2/\text{s}]$$

وهذا متَّجِهٌ مقداره 106.83 كيلوغرام متر تربيع لكل ثانية، يميل تقريباً بالزاوية 26.56^{o} عن الاتجاه الرأسـي، وهو عمودي على كلٍ من المتجهيين $\boldsymbol{v}_C$، $\mathbf{r}_C$. ولإيجاد الزَّخَم الزَّاوِيّ المغزلي L_{spin}، فنعتبر الحركة بالنسبة إلى مركز الكتلة. حركة الدحراج دائريةً ومنتظمة، ويقع كل عنصر كتلة على نفس البعد عن مركز الكتلة، كما يتحرك كل عنصر كتلة نسبة إلى مركز الكتلة بنفس السرعة، وتتعامد سرجهة هذا العنصر مع نصف القطر ρ في نفس النقطة، **شـكل 9.8**. وعليه؛ ومن

المعادلة 45.8 يكون حاصل الضرب الاتجاهي $\rho_i \times \boldsymbol{v}_{ic}$ هو نفسه لكل عنصر كتلة. وهكذا فالزَّخَم الزَّاوِّي المغزلي يساوي المجموع



شــكل 9.8

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \rho_i \times \boldsymbol{v}_{i\ c} = M\, \rho \times \boldsymbol{v}_c$$

وهذا متجه في الاتجاه السالب لمحور Ox ، ومقداره $|\mathbf{L}_{spin}| = M\rho \times v_c$

$$\mathbf{L}_{spin} = 50 \times 0.50 \times 2 = -50\, \boldsymbol{i}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

وهو ؛ بالطبع لا يعتمد على موقع نقطة الأصل . أما الزخم الزاوي الكلي فيكون

$$\mathbf{L} = -100\, \boldsymbol{i} + 100\, \boldsymbol{k}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

1.7.8 تَغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والأجسام الجاسئة

لقد تم تعريف الزَّخَم الزَّاوِّي للجسيم في بند 1.5. وفي البند 7.8 تم تعريف مفهوم الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة. وبشكل عام يعرف الزَّخَم الزَّاوِيّ للجسيم بدلالة زخمه وموضعه. لقد اصبح واضحاً أن الزَّخَم الزَّاوِيّ مفهومٌ اتِّجَاهِي، وإتجاهه هو الاتجاه المحوري الذي يعرف بقاعدة اليد اليمنى. والزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام معين هو المجموع الاتجاهي للزِّخام الزَّاوِّية للجسيمات المكونة للنظام. لكن هناك أسئلة مهمة تتطلب الإجابة: تحت أي ظرفٍ يكون الزَّخَم الزَّاوِيّ محفوظاً؟ وماذا نحتاج لتغير الزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام؟ ثم ما هو قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ؟ إن الإجابة على السؤال الأخير تعطي الإجابة على السؤلين الأوليين.

والحقيقة أن الزَّخَم الزَّاوِيّ يعرف رياضياً بدلالة مفاهيم معروفة. ولذلك يمكن اشتقاق قانون تغيره رياضياً من قوانين نيوتن دون الحاجة إلى أساس تجريدي جديد. فنبدأ من معادلة 8.5 للجسيم i مع إضافة مجموعة القوى الداخلية المؤثرة على هذا الجسيم

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{M}\left(\mathbf{F}_{ij}\right)$$

وبكتابة نفس المعادلة لكل جسيمات النظام $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$، ثمَّ جمع المعادلات الناتجة هندسياً نحصل على

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_F + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \mathbf{M}(\mathbf{F}_{ij})$$

أو بشكلٍ مختصر

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_F \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}(\mathbf{F}) \qquad 46.8$$

حيث يساوي المجموع الثاني صفراً، انطلاقاً من الخاصية الثانية للقوى الداخلية. وتمثل المعادلة 46.8 قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام بصورة تفاضلية: **معدل تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام يساوي عزم الدوران للقوى المؤثرة عليه حول نفس المركز**. ومن الطبيعي أن نُسْنِدَ كلاً من الزَّخَم الزَّاوِيّ وعزم الدوران إلى نقطة الأصل نفسها.

وتكمن أهمية قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام، **معادلة** 46.8 عند دراسة الحركة الدوانية للجسم والنظام بشكلٍ عام، كحركة الجيروسكوب gyroscope ونظرية الصدمة impact، إذ يتم حذف كل القوى الداخلية للنظام غير المعروفة أصلاً.

2.7.8 قانون حفظ الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام

إذا كان عزم الدوران لكل القوى المؤثرة على النظام المعين يساوي صفراً. فإن الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام يكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.} \qquad 47.8$$

أي أن الزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام يثبت مقداراً واتجاهاً عندما يتلاشى عزم الدوران الخارجي. وكما هو معروفٌ، ينشأ العزم الخارجي من خارج النظام بينما ينشأ العزم الداخلي من داخل النظام، وهذا الأخير يساوي صفراً. فغواص هوائي هابطٌ من طائرةٍ في الهواء، مثلاً، يبدأ بالدوران حول نفسه بعد مرور بعض الوقت من قفزته. وهذا الدوران لا يحدث من حركة عضلاته أو أطرافه بل بسبب عزومٍ أثر بها الهواء على الغواص. ولو سقط الغواص في فراغٍ خالٍ من الهواء، لما استطاع تغيير زخمه الزَّاوِيّ بواسطة أي التواءٍ لجسمه على الإطلاق.

وإذا كان عزم الدوران الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام ذا قيمةٍ محددة، لكن إحدى مركباته صفراً، $M_{fz} = 0$ مثلاً، فإن ذلك يستلزم أن مركبة الزَّخَم الزَّاوِيّ على المحور Oz تساوي مقداراً ثابتاً

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow L_z = \text{const.} \qquad 1.47.8$$

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سؤال م 17.8

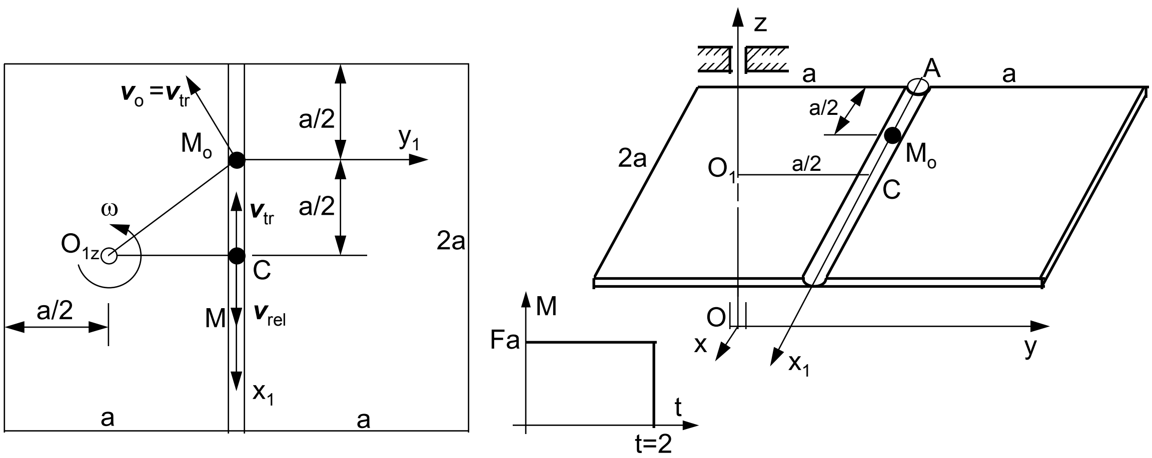
تدور منصةٌ خشبيةٌ مربعة الشكل، أطوالها $2a\times2a$ وكتلتها M في مستوىً أفقي حول محورٍ رأسي ثابت Oz باحتكاك مهمل. ينصف سطح المنصةِ مجرىً أملس AB بعرضها، ويتواجد فيه كرةٌ ملساء، كتلتها m، مربوطةً بخيطٍ عديم الوزن والاستطالة طوله a/2، إلى النقطة A. إذا ابتدأ النظام الحركةَ من السكون مُتَأثِراً بعزمٍ دورانيٍ ثابت، مقداره $\mathbf{M}_F = Fa\,\boldsymbol{k}$ حتى اللحظة $t = 2\,[s]$. وفي تلك اللحظة $t = 2\,[s]$ قُطِعَ الخيط الذي يربط الكرة بالمنصة، ثُمَّ تحركت الكرة داخل المجرى حسب العلاقة

$$M_oM = x_1 = [a\,(t-2)/4] \quad \forall \quad t \ge 2 \qquad a$$

حيث t الزمن بالثواني و x_1 المسافة المقطوعة . أوجد السرعة الزاوية للمنصة في اللحظتين t=2[s] و t=4[s].

---

[5] الجيروسكوب: أداة تستخدم لحفظ توازن الطائرة أو الباخرة ولتحديد الإتجاه.... أنظر المورد.



شـــكل م 17.8

الحــــل

يدور النظام المكون من المنصة والكرة الصغيرة المثبتة إليها في النقطة M_O حول المحور Oz تحت تأثير عزم دوراني ثابت من بداية الحركة وحتى الثانية $t = 2\,[s]$. لذلك نستخدم قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ لهذا النظام. الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام

$$\mathbf{L}_{sys} = \mathbf{L}_P + \mathbf{L}_M \tag{1}$$

الزَّخَم الزَّاوِيّ للمنصة

$$\mathbf{L}_P = I_{Oz}\,\omega\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

حيث إن I_{Oz} عزم قصور المنصة حول محور الدوران Cz وهو يساوي وفقاً لنظرية المحاور المتوازية

$$I_{Oz} = M\,[\,(2\,a\,)^2 + (2a)^2\,]\,/\,12 + M\,(O_1C)^2 = M\,[\,8\,a^2\,]\,/12 + M\,a^2\,/\,4$$

$$I_{Oz} = 11M\,a^2\,/\,12 \tag{3}$$

وبتعويضه في المعادلة 2 ينتج أن الزَّخَم الزَّاوِيّ للمنصة

$$\mathbf{L}_P = [11M\,a^2\,\omega\,/\,12\,]\ \boldsymbol{k} \tag{4}$$

الزَّخَم الزَّاوِيّ للكرة الصغيرة بالنسبة لمحور الدوران Oz عندما تكون في الموقع M_o

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{r}_o \times m\,\boldsymbol{v}_{tr} \tag{5}$$

حيث $\mathbf{r}_o$ متجه موضع الكرة بالنسبة لمركز الإحداثيات المتحركة O_1، و $\boldsymbol{v}_{tr}$ سرجهة الكرة المكتسبة (من حركة المنصة) .

وباستبدال $\mathbf{r}_o = [a\sqrt{2}\,/\,2]\,\mathbf{e}_r$ و $\boldsymbol{v}_{tr} = [a\sqrt{2}\,/\,2\,]\,\omega\,\mathbf{e}_\varphi$ في المعادلة 5 ينتج أن

$$\mathbf{L}_M = (m\,a^2\,/\,2)\,\omega\,\boldsymbol{k} \tag{6}$$

الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام ينتج من جمع الجزأين 4 و 6

$$\mathbf{L}_{sys} = \frac{11M + 6\,m}{12}\,a^2\,\omega\,\boldsymbol{k} \tag{7}$$

مشتقة هذا الزَّخَم الزَّاوِيّ تساوي العزم الدوراني . أو رياضياً

$$\frac{d\mathbf{L}_{sys}}{dt} = \mathbf{M}_F \quad \Rightarrow \quad \frac{11M + 6m}{12} a^2 \frac{d\omega}{dt} \boldsymbol{k} = Fa\, \boldsymbol{k} \qquad 8$$

أو كمركبة $\boldsymbol{k}$ بعد اختصار البعد a من الطرفين

$$\frac{11M + 6m}{12} a \frac{d\omega}{dt} = F \qquad 9$$

وبإعادة ترتيب المعادلة 9 ، وحلُّ الناتج كتكاملٍ محدود ضمن الشروط الابتدائية التالية

$$t = 0 , \omega = 0 \quad \& \quad t = 2 , \omega = \omega_2 \qquad 10$$

يعطي

$$\frac{11M + 6m}{12} a \int_0^{\omega_2} d\omega = \int_0^2 F\, dt \qquad 11$$

$$\frac{11M + 6m}{12} a \omega_2 = 2F \qquad 12$$

حل المعادلة 12 بدلالة ω_2

$$\omega_2 = \frac{24F}{(11M + 6m)a} \qquad 13$$

ولإيجاد السرعة الزاوية للمنصة والنظام بشكل عام في اللحظة $t = 4[s]$، نحدد موقع الكرة لحظتئذٍ

$$x_1 \big|_{t=4[s]} = [a (t - 2) / 4] \big|_{t=4[s]} = [a (4 - 2) / 4]$$

$$x_1 = a / 2 \qquad 14$$

أي تتواجد الكرة في مركز المنصة في النقطة C (منتصف المجرى AB). وتكون سرجهتها في تلك اللحظة مكونةً من المركبتين المكتسبة والنسبية

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{tr} + \boldsymbol{v}_{rel} \qquad 15$$

سرجهة الكرة المكتسبة

$$\boldsymbol{v}_{tr} = - (a\, \omega_4 / 2)\, \boldsymbol{i} \qquad 16$$

حيث ω_4 السرعة الزاوية للمنصة في اللحظة $t=4[s]$. سرجهة الكرة النسبية فتُحسب من المعادلة a

$$\boldsymbol{v}_{rel} = d\mathbf{x}_1 /dt = (a / 4)\, \boldsymbol{i} \qquad 17$$

زخم الكرة يساوي مجموع الزَّخمين المكتسب والنسبيّ

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_{tr} + \mathbf{K}_{rel} = 0.25\, m\, a (1 - 2\, \omega_4)\, \boldsymbol{i} \qquad 18$$

وبالتالي فالزَّخَم الزَّاوِيّ للكرة في اللحظة t = 4 ثوان

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{r}_M \times \mathbf{K}_M = m \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a(1 - 2\omega_4)}{4} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{ma(2\omega_4 - 1)}{8} \boldsymbol{k} \qquad 19$$

وبجمع المعادلة 19 مع المعادلة 4 عندما تكون $\omega = \omega_4$ ينتج الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام في تلك اللحظة، أي $t = 4\ [s]$

$$\mathbf{L}_{sys\,4} = \left(\frac{11}{12} Ma^2\,\omega_4 + \frac{m a^2}{8}(2\,\omega_4 - 1) \right) \boldsymbol{k} \qquad 20$$

وحيث لا تؤثر أيَّةُ قوىً في الإتجاه $\boldsymbol{k}$ على المنصة والنظام $M_{fz} = 0$، فإن الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام يكون محفوظاً. فمن المعادلتين 7 و 20

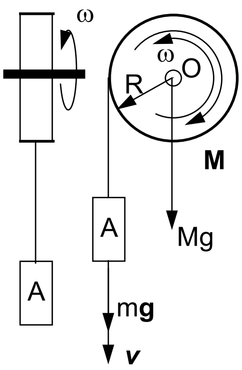
$$\mathbf{L}_{sys\,4} = \mathbf{L}_{sys\,2} \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{11}{12} Ma^2\,\omega_4 + \frac{m a^2}{8}(2\,\omega_4 - 1) = \frac{11M+6m}{12} a^2\,\omega_2 \right) \boldsymbol{k} \qquad 21$$

حيث حلها بدلالة ω_4 يعطي

$$\omega_4 = \omega_2 + \frac{3m(1+\omega_2)}{2(11M+3m)} \qquad 22$$

أي أن السرعة الزاوية للمنصة تزداد بعد تلاشي عزم الدوران وهذا نتيجة للحركة النسبية للكرة داخل المجرى الأملس.



شـــكل م 18.8

ســـؤال م 18.8

تدور إسطوانةٌ دائريةٌ ومتجانسة، كتلتها M ونصف قطرها R، حول محورٍ أفقيٍ ثابت يمر بمركز كتلتها O. ويلتف حول الإسطوانة خيطٌ عديم الوزن والاستطالة، يرتبط بطرفه الآخر الثقل A، كتلته m.

أوجد معادلة حركة الثقل المعلق إذا ما تحرك النظام من السكون تحت تأثير قوة وزن الثقل وعزم الدوران $\mathbf{M} = -\,0.5\,m\,g\,R\boldsymbol{k}$. أهمل الاحتكاك عند الدوران.

الـــحـــل

سنحل هذا السؤال باستخدام قانون تغير الزَّخَم الزَّاويّ للنظام، معادلة 46.8. وذلك بأخذ مركبتها بالنسبة لمحور الدوران Ox

$$dL_{ox}\,/\,dt = M_{Rx} \qquad 1$$

حيث أن M_{Rx} عزم الدوران الرئيسي المؤثر على النظام بينما L_{ox} الزَّخَم الزَّاويّ لأجزائه، الإسطوانة والثقل

$$L_{ox} = L_{oxC} + L_{oxA} \qquad 2$$

الزَّخمُ الزَّاويّ للإسطوانة

$$L_{oxC} = I_{Ox}\,\omega = MR^2\,\omega / 2 \qquad 3$$

بينما الزَّخم الزَّاويّ للثقل ، $v_A = R\omega$

$$L_{oxA} = m\,v_A\,R = m\,R^2\,\omega \qquad 4$$

ولذلك يكون الزَّخمُ الزَّاويُّ الكلي

$$L_{ox} = (M + 2m)\,R^2\,\omega / 2 \qquad 5$$

من جهةٍ أخرى؛ العزم الرئيسي M_{Rx} المؤثر على النظام هو العزم الناتج من وزن الثقل المعلق بالنسبة لمحور الدوران Ox

$$M_{Rx} = M_{Fx} - M = m\,g\,R - m\,g\,R/2$$

$$M_{Rx} = m\,g\,R/2 \qquad 6$$

وباستبدال مشتقة L_{ox} من المعادلة 5 و M_{Rx} من المعادلة 6 والتعويض بدل ذلك في المعادلة 1 ينتج أن

$$\left(\frac{M+2m}{2}\right) R^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} m g R \qquad 7$$

وحيث أن $\ddot{y}=R\frac{d\omega}{dt}$ ، يمكننا كتابة المعادلة 7 كدالة تسارع

$$\ddot{y}=\frac{m}{M+2m}g = \text{const.} \qquad 8$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية يبين بدون صعوبةٍ أن

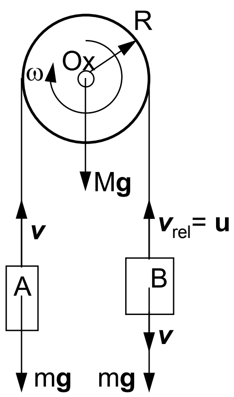
$$y = \frac{1}{2}\frac{m}{M+2m}gt^2 + C_1 t + C_2 \qquad 9$$

وبعد استبدال الشروط الابتدائية ينتج أن $C_1 = C_2 = 0$. وبالتالي تؤول المعادلة 9 إلى ما يلي

$$y = \frac{1}{2}\frac{m}{M+2m}gt^2 \qquad 10$$

ســـؤال م 19.8

إذا افترضنا أن الثقل A في السؤال السابق يرتفع للأعلى بعد ربط الطرف الثاني للحبل بثقلٍ آخر B، كتلته m. إذا تسلق الثقل B الحبل وصعد عليه بسرعةٍ نسبيةٍ، مقدارها u. أوجد سرعة الثقل A، إذا ما تحرك النظام من السكون، وذلك باهمال الاحتكاك في محور الدوران.



شـــكل م 19.8

الـــحـــل

سنحل هذا السؤال باستخدام قانون حفظ الزَّخمُ الزَّاويُّ للنظام، وذلك لأن محصلة عزوم الدوران حول المحور Ox صفراً

$$\mathbf{M}_F = M_{Fx}\,\boldsymbol{i} = 0 \qquad 1$$

ولذلك فالزَّخمُ الزَّاويّ يكون ثابتاً

$$L_{Ox} = L_{Oxo} = \text{const.} \qquad 2$$

ولأن النظام تحرك من السكون، فإن زَخمُه الزَّاويّ الابتدائي يساوي صفراً

$$L_{Oxo} = 0 \qquad 3$$

ولهذا يؤول قانون حفظ الزَّخمُ الزَّاويّ للنظام للشكل الرياضي التالي

$$L_{Ox} = 0 \qquad 4$$

يتكون الزَّخمُ الزَّاويّ للنظام حول محور الدوران من مجموع الزّخام الزَّاوية للإسطوانة والثقلين A و B

$$L_{Ox} = L_{Ox\,C} + L_{Ox\,A} + L_{Ox\,B} \qquad 5$$

الزَّخمُ الزَّاويّ للإسطوانة

$$L_{Ox\,C} = I_{Ox}\,\omega = M R^2\,\omega / 2 \qquad 6$$

ولأن الثقل الثاني B يصعد على الحبل بالسرجهة النسبية **u**، فإن هذا يعني أن حركته المطلقة تتحدد بفرق السرعة $v_B = u - v_A$، ولهذا فالزَّخمُ الزَّاويّ للثقل B بالنسبة لمحور الدوران Ox

$$L_{Ox\,B} = m\,[\,R^2\,\omega - R\,u\,] \;\Rightarrow\; L_{Ox\,B} = m\,R\,(v - u) \qquad 7$$

بينما يكون الزَّخمُ الزَّاويّ للثقل A

$$L_{Ox\,A} = m\,R^2\,\omega \;\Rightarrow\; L_{Ox\,A} = m\,R\,v \qquad 8$$

وبتعويض الزِّخام الزَّاوِيَّة الواردة في المعادلات 6 - 8 في المعادلة 5 ينتج أن الزَّخمُ الزَّاويّ للنظام هو

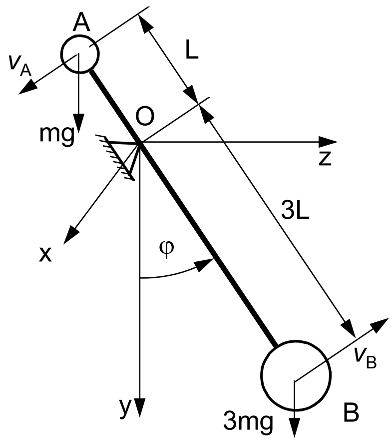
$$L_{Ox} = \frac{MR^2\,\omega}{2} + 2mR^2\,\omega - m\,R\,u \qquad 9$$

وبمساواة المعادلة 9 بالصفر، معادلة 4، ينتج أن حل الناتج بدلالة السرعة تبلغ

$$v = \frac{2\,m}{M + 4\,m}u \qquad 10$$

ســـؤال م 20.8

يتحرك قضيبٌ عديم الوزن، وطوله 4L في المستوى الرأسي Oyz حول المحور الأفقي Ox المار في النقطة O. ويحمل القضيب ثقلين A و B، كتلتاهما m و 3m على الترتيب. أوجد الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للثقلين بالنسبة للمركز O؟ وما المعادلة التفاضلية لحركة الثقلين؟



شـــكل م 20.8

الـــحـــل

نحدد خواص طرفي القضيب A و B الكينماتيكية انطلاقاً من مركز الإحداثيات O

$$\mathbf{r}_A = -L\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - L\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_A = -L\cos\varphi\,\boldsymbol{j} - L\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}_B = 3\,L\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + 3\,L\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_B = -3\,L\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + 3\,L\,\dot{\varphi}\sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

الزَّخَمُ الزَّاوِيّ المداريّ، معادلة 44.8

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{r}_A \times m_A\boldsymbol{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B \times \boldsymbol{v}_B$$

$$\mathbf{L}_o = m\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -L\cos\varphi & -L\sin\varphi \\ 0 & L\dot{\varphi}\sin\varphi & -L\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix} + 3m\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 3L\cos\varphi & 3L\sin\varphi \\ 0 & -3L\dot{\varphi}\sin\varphi & 3L\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_o = 28L^2 m\dot{\varphi}\boldsymbol{i} \qquad 1$$

أمّا العزم الرئيسي للقوى المؤثرة على النظام فتحدد من المعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{g} + \mathbf{r}_B \times m_B\,\mathbf{g}$$

$$\mathbf{M}_F = m\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -L\cos\varphi & -L\sin\varphi \\ 0 & g & 0 \end{bmatrix} + 3m\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 3L\cos\varphi & 3L\sin\varphi \\ 0 & g & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_F = -8\,Lmg\sin\varphi\,\boldsymbol{i} \qquad 2$$

وباستبدال مشتقة الزخم الزاوي للمعادلة 1 ومساواتها مع العزم الدوراني، معادلة 2، حسب قانون تغير الزَّخَمُ الزَّاوِيّ، والمعادلة 46.8 ، ينتج أن

$$28\,L^2 m\,\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{i} = -8\,L m g \sin\varphi\,\boldsymbol{i} \qquad 3$$

أو كمعادلة تفاضلية لحركة هذا النظام

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\,g}{7\,L}\sin\varphi = 0 \qquad 4$$

8.8 الطاقة الحركية للأنظمة وللجسم الجاسئ

1.8.8 الطاقة الحركية للنظام

الطاقة الحركية لنظام هي الكمية القياسيةٌ المكافئة لمجموع الطاقات الحركية لمكوناته الجزئية. وحيث أنه من غير الممكن أبداً أن تكون سالبةً، فإن أي طاقتين حركيتين تأتلفان معاً لتعطيا طاقةً حركيةً أكبر. ويكون للنظام طاقةً حركيةً صِفرية فقط إذا كانت جميع مكوناته الجزيئية ساكنة. غير أن الطاقة الحركية لنظام ما لتتسم بسِمَةٍ بسيطةٍ واحدة، إذ يمكن فصلها إلى جزأين: طاقة الحركة الداخلية وطاقة الحركة الجِّرْميَّة. وباستبدال $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC}$، معادلة 68.2 و**شـــكل 8.2**، فإن طاقة حركة النظام تساوي مجموع الطاقات الحركية لكل الجسيمات المكونة له

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\,\boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\,(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC})\cdot(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC})$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\,(\boldsymbol{v}_C^2 + 2\,\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{iC} + \boldsymbol{v}_{iC}^2)$$

أو كثلاثة مجاميع

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\,v_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2\,m_i\,\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{iC} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\,v_{iC}^2 \qquad 49.8$$

المجموع الأول

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\,v_C^2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}m_i\right\}v_C^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 \qquad 1.50.8$$

يمثل الطاقة الحركية الانتقالية للنظام، وهو يساوي نصف حاصل ضرب كتلة النظام الكلية ومربع سرعة مركز كتلته. أمّا المجموع الثاني فيساوي صفراً، قياساً على المعادلة 4.8. إذ يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}2m_i\,\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{iC} = \boldsymbol{v}_C\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\boldsymbol{v}_{iC} = 0 \qquad 2.50.8$$

وأخيراً، يساوي المجموع الثالث الطاقة الحركية لجسيمات النظام الناتجة من حركاتها الداخلية كاهتزاز الجزيئات، وهذه تساوي صفراً. وباختصار؛ فإن طاقة حركة النظام

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{iC}^2 \qquad 50.8$$

ومن هذه المعادلة يمكن صياغة النظرية التالية التي صاغها **كينيج** Knig: **طاقة حركة النظام عند حركته المطلقة تساوي طاقة الحركة الإنتقالية لمركز كتلته مضافاً إليها طاقة حركة كل الجسيمات المكونة للنظام عند حركتها النسبية بالنسبة إلى مركز الكتلة.**

2.8.8 الطاقة الحركية للجسم الجاسئ

إذا كان الجسم الجاسئ مركباً من فئة من الجسيمات، عددها n ، $n\to\infty$ ، كتلها m_i، متَّجِهَات مواضعها $\mathbf{r}_i$ وسرجهاتها $\boldsymbol{v}_i$ ، $i = 1,2,\ldots,n$ ، فإن طاقة الجسم الجاسئ الحركية تُعَرَّفُ رياضياً بالمجموع الهائل

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2} \qquad 1.51.8$$

وإذا كنا نعالج توزيعاً مستمراً للكتلة ، فإن هذا المجموع يؤول إلى التكامل

$$T = \frac{1}{2}\int_M v^2\, dm \qquad 2.51.8$$

وهذا تكاملٌ محدود ينبغي أن يشمل حدّاه الجسم بأكمله M . ونستطيع تمييز الحالات الخاصة التالية :

الحركة الإنتقالية

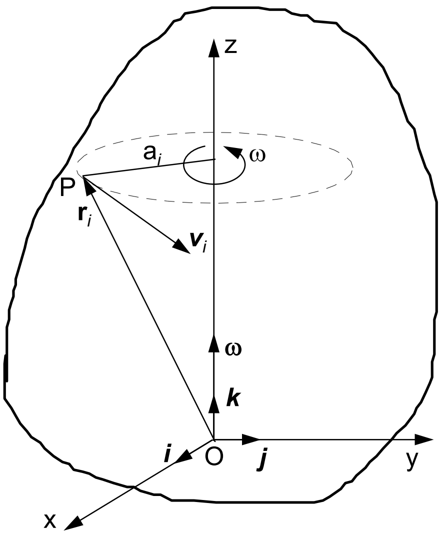
إذا كان الجسم الجاسئ يتحرك حركةً انتقاليةً فإن كل جسيمٍ فيه يعاني نفس الإزاحة ويتحرك بنفس السرجهة؛ أي سرجهة مركز الكتلة . وعليه فإن الطاقة الحركية الكلية

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 \qquad 52.8$$

والتي تكافئ الطاقة الحركية لجسيمٍ مفرد ، كتلته M وسرعته v_C .

الحركة الدورانية حول محور ثابت

إذا كان الجسم الجاسئ يدور حول محور ثابت، Oz مثلاً، فإن كل جسيماته (عناصر كتلته) ستدور في مدارات دائرية حول المحور نفسه، **شـــكل 10.8**. ويمكن التعبير عن السرعة v_i للجسيم الاعتباطي بدلالة مضروب بعده عن محور الدوران a_i في السرعة الزاوية ω لدوران الجسم الجاسئ، $v_i = a_i\,\omega$. وعليه تكتب المعادلة 1.51.8 بصيغة مغايرة



شـــكل 10.8

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(a_i\,\omega\right)^2$$

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i\, a_i^2\right\}\omega^2 \qquad 1.53.8$$

وتؤول المعادلة الثانية 2.51.8 إلى تكامل آخر

$$T = \frac{1}{2}\int_M v^2\, dm = \frac{1}{2}\int_M (a\,\omega)^2\, dm = \frac{1}{2}\left\{\int_M a^2\, dm\right\}\omega^2 \qquad 2.53.8$$

ليتبين لنا أن معاملي المعادلتين 53.8، وهما المجموع في المعادلة الأولى والتكامل المحدود في المعادلة الثانية، يمثلان في الوقت نفسه عزم قصور الجسم الجاسئ أو النظام ذي الفئة المتميزة (المتقطعة) من الجسيمات $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\, a_i^2$ ، أو عزم قصور جسم مستمر (متصل) للمادة $I_z = \int_M a^2\, dm$. ولهذا نكتب

$$T = \frac{1}{2} I_z\, \omega^2 \qquad 54.8$$

ومن السهولة بمكان اشتقاق علاقةٍ مهمة بين عزم الدوران ومعدل تغير الطاقة الحركية. ونقطة البداية هي قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ، معادلة 46.8. فلحركة الجسم الجاسئ الدورانية حول المحور Oz يكون الزَّخَم الزَّاوِيّ مساوياً لحاصل ضرب عزم القصور في السرعة الزاوية $L_z = I\omega$، وتكون مركبة z للمعادلة المذكورة 46.8

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_Z = \left.\mathbf{M}_F\right|_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{d(I\,\omega)}{dt} = M_{Fz}$$

وبعد ضرب الطرفين في السرعة الزَّاويّة وترتيبهما

$$\frac{d(I\,\omega^2/2)}{dt} = M_z\,\omega$$

أو

$$\frac{dT}{dt} = P \qquad 55.8$$

أي أن معدل تغير الطاقة الحركية يساوي القدرة، ولذلك نحصل على تعبيرٍ للقدرة التي يبذلها عزم الدوران على جسمٍ جاسئ

$$P = M_z\,\omega \qquad 56.8$$

لاحظ التشابة الواضح بين المعادلة 56.8 والمعادلة 19.8. هذا وقد لُخصت الصيغ المتناظرة للحركتين الانتقالية والدورانية في **الجــدول 1.8** التالي.

الكمية الفيزيائية	صيغة الحركة الانتقالية	صيغة الحركة الدورانية
التسارع	$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	$M_z = I_z\,\varepsilon = I_z\,\dfrac{d\omega}{dt}$
الطاقة الحركية	$T = \dfrac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2$	$\dfrac{1}{2}I\,\omega^2$
الشغل	$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$	$dA = M_z\,d\varphi$
القدرة	$P = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v}$	$P = M_z\,\omega$

جدول 1.8: الصيغ المتناظرة للحركتين الانتقالية والدورانية

الحركة المستوية

يمكن تمثيل الحركة المستوية كمجموع حركتين إحداها انتقالية والأخرى دورانية. لذلك فطاقة حركة الجسم الجاسئ تساوي المجموع الجبري لطاقة الحركة الانتقالية لمركز الكتلة $\frac{1}{2}Mv_C^2$ وطاقة الحركة الدورانية للجسم حول مركز كتلته $\frac{1}{2}I_C\,\omega^2$. أو رياضياً

$$T = \frac{1}{2}M\,v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\,\omega^2 \qquad 57.8$$

حيث I_C عزم قصور الجسم الجاسئ حول محور الدوران المار في مركز الكتله C.

3.8.8 قانون تغير طاقة حركة النظام

إن القانون الذي سبق إثباته في البند 5.5 للجسيم المادي، والمعادلات 23.5 - 25.5 يسري بصورة صحيحة لكل جسيمٍ من جسيمات النظام الميكانيكي. وبالتالي؛ إذا درسنا حركة جسيم ما من جسيمات النظام، i مثلاً، كتلته m_i، وسرجهتاه في اللحظتين الابتدائية والنهائية v_{io} و v_i. عندئذ ؛ بإضافة الرمز السفلي i لقانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورته التكاملية ، معادلة 1.24.5، نحصل على

$$\frac{1}{2}m_i\,v_i^2 - \frac{1}{2}m_i\,v_{io}^{\,2} = A_{ii} + A_{ie} \qquad 58.8$$

حيث يعرّف المقدار A_{ii} شغل كل القوى الداخلية المؤثرة على الجسيم i من باقي الجسيمات في النظام، بينما A_{ie}، شغل كل القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم نفسه. لقد أضيف شغل القوى الداخلية A_{ii} إلى شغل القوى الخارجية A_{ie} في المعادلة 1.24.5، لأن كل القوى المؤثرة من جسيمات النظام الأخرى $i \neq j = 1,2,....n$ على الجسيم قوىً خارجية.

وللنظام المكون من مجموعةٍ من الجسيمات، عددها n ، $i = 1,2,3,....n$، كتلها m_i، وسرجهاتها v_i فإن كتابة المعادلة 58.8 لكل جسيمٍ من جسيماته، ومن ثَمَّ جمع كل المعادلات الناتجة حداً حداً يعطي

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,v_{io}^2 = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} A_{ie}$$

أو بشكل أكثر اقتضاباً

$$T - T_o = A_i + A_e \qquad 59.8$$

حيث إن T_o و T المجموعان الجبريان لطاقتي حركة نظام الجسيمات في اللحظة الابتدائية t_o والمعينة t بالترتيب

$$T_o = \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_{io}^2 \quad , \quad T = \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2$$

من جهةٍ أخرى، يمثل الرمز A_i الشغل الكلي لجميع القوى الداخلية المؤثرة على جسيمات النظام $A_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ ،

أما الرمز A_e فيمثل الشغل الكلي لجميع القوى الخارجية المؤثرة على النظام $A_e = \sum_{i=1}^{n} A_{ie}$. وعلى هذا الأساس

تعرف المعادلة 58.8 قانون تغير طاقة حركة النظام بصورة تكاملية: **تغير الطاقة الحركيه لنظام جسيماتٍ معين عند معاناته إزاحةً ما يُساوي مجموع الشغل الكلي الذي تبذله كل القوى الخارجية والداخلية المؤثرة على النظام في هذه الإزاحة**. ويمكن التعبير عن هذا القانون بدلالة التغير في طاقة النظام الحركية؛ من معادلة 23.5 التي تسري على أي جسيم من جسيماته

$$d\left(\frac{1}{2} m_i\, v_i^2\right) = dA_{i\,i} + dA_{i\,e}$$

وحيث أن الجسيم i أختير بشكل اعتباطي، فإن كتابة المعادلة المذكورة أعلاه لكل جسيمٍ من جسيمات النظام وجمعها حداً حداً ينتج المعادلة

$$d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i\, v_i^2\right) = d\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + d\sum_{i=1}^{n} A_{ie} \qquad 1.60.8$$

أو

$$dT = dA_i + dA_e \qquad 2.60.8$$

والتي تعبر عن قانون تغير الطاقة الحركية للنظام بصورة تفاضلية: **المشتقة الأولى لطاقة حركة النظام تساوي الشغل الكلي المبذول على جميع أجزاء النظام خلال الفترة الزمنية المعينة.**

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

تنبيـــــــه: سنعتبر البكرات عديمة الوزن وملساء والحبال عديمة الوزن والاستطالة ما لم يرد عكس ذلك.

سـؤال م 21.8

ينزلق الصندوق A، فوق صندوق آخر B، الذي يتحرك (B) فوق مستوىً أفقيٍ أملس. إذا كانت v السرعة الابتدائية لانزلاق الصندوق A فوق الأخر، الذي ابتدأ الحركة من السكون. أوجد السرعة النهائية للصندوقين والمسافة التي يقطعها الصندوق العلوي حتى تستقر حركته فوق B. معامل الاحتكاك بين الصندوقين μ و $m_A = m$ ، $m_B = M$

الـــحــل

حال إعطاء الصندوق العلوي A السرعة الابتدائية v وانزلاقه فوق الصندوق B يبدأ تباطؤه نتيجة الاحتكاك إلى أن تصل سرعته النسبية صفراً $v_{AB} = 0$. أما الصندوق السفلي B فيبدأ حركته من السكون ، تحت تأثير قوة الاحتكاك الناتجة من

حركة الصندوق A وتزداد سرعته إلى أن تصل حداً معيناً ، سرعة نهائية v_f، يكون فيه الصندوق الآخر (العلوي) قد استقر فوق الصندوق السفلي، وتؤول حركة الجسمين لحظتها إلى حركة جسمٍ واحد فوق السطح الأملس. فمن قانون حفظ الزخم للنظام في اتجاه الحركة، معادلة 2.16.8، وللاتجاه x

$$K_x - K_{ox} = 0 \qquad 1$$

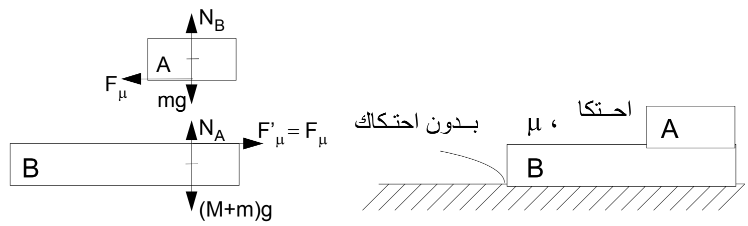
الزخم الإبتدائي : ففي اللحظة الإبتدائية ، ينطلق الصندوق العلوي A نتيجة دسره بالسرعة v، بينما يكون الصندوق B مستقراً

$$K_{ox} = K_{ox\,A} + K_{ox\,B} \Rightarrow K_{ox\,A} = m\,v \;\&\; K_{ox\,B} = 0$$

$$K_{ox} = m\,v \qquad 2$$

الزخم النهائي: في اللحظة النهائية، تخمد حركة الصندوق العلوي $v_{Af} = 0$، بينما يكون الصندوق السفلي B قد اكتسب سرعةً مقدارها $v_{Bf} = v_f$

$$K_x = K_{x\,A} + K_{x\,B} = 0 + (M + m)\,v_f$$



شــكل م 21.8

$$K_x = (M + m)\,v_f \qquad 3$$

وبتعويض الزخمين، الإبتدائي ، معادلة 2 والنهائي ، معادلة 3 في المعادلة 1 يكون

$$(m + M)\,v_f - m\,v = 0 \qquad 4$$

لنجد السرعة النهائية للصندوقين

$$v_f = \frac{m}{m + M}\,v \qquad 5$$

تتحدد المسافة التي يقطعها الصندوق العلوي فوق الصندوق السفلي حتى تستقر حركته (يتحركان عندئذٍ بسرعة واحدة ومنتظمة) بالنسبة إلى السطح الأملس من قانون التغير في طاقة حركة النظام ، معادلة 58.8

$$T - T_o = A \qquad 6$$

طاقتا حركة النظام الإبتدائية والنهائية

$$T_o = T_{Ao} + T_{Bo} = \frac{1}{2}m\,v^2 + 0 \quad \Rightarrow T_o = \frac{1}{2}m\,v^2 \qquad 7$$

$$T = T_{Af} + T_{Bf} = T_{(A+B)f} \quad \Rightarrow T = \frac{1}{2}(m + M)\,v_f^2 \qquad 8$$

الشغل المبذول على النظام يكافئ المجموع الجبري لأشغال مركبات القوة الخارجية. قوة الاحتكاك هي القوة الوحيدة التي تعمل شغلاً، إذ تعيق حركة الصندوق العلوي A. وتبعاً لذلك ، يتوقف هذا الصندوق بعد إزاحته المسافة d فوق الصندوق B. شغل هذه القوة على الصندوق A

$$A_{FA} = -\mu\,m\,g\,d \qquad 9$$

الصندوق B يتحرك وهو حامل الصندوق العلوي A، أي أن حركته تتم في الوقت الذي يتم فيه الصندوق العلوي نفس الحركة. لذلك تعتبر قوة الاحتكاك هنا قوة داخلية

$$A_{FB} = 0 \qquad 10$$

الشغل الكلي، نجمع العلاقتين 9 و 10

$$A = A_{FA} + A_{FB} = -\mu m g d \qquad 11$$

نعوض العلاقات 7، 8 و 11 في معادلة معدل تغير الطاقة 6،

$$\frac{1}{2}(m + M) v_f^2 - \frac{1}{2} m v^2 = -\mu m g d \qquad 12$$

وباستبدال v_f ، بقيمتها من المعادلة 5 ، وتعويضها في المعادلة 12 ثم حل الناتج بدلالة المسافة ينتج أن

$$d = \frac{M v^2}{2\mu g (M+m)} \qquad 13$$

سـؤال م 22.8

تتدحرج العجلة المجوفة A، بدون انزلاقٍ على سطحٍ أفقيٍ، ساحبةً معها الثقل B، بواسطة حبلٍ يلتف حول بكرة G. من جهةٍ أخرى يُشَدُّ مركز العجلة الهندسي O إلى حائطٍ جانبيّ بواسطة زنبركٍ، معامل مرونته 164 نيوتن/متر، بحيث يُنَاظر الوضع الابتدائي، **رسم 1**، شدَّ الزنبرك بالمقدار 0.8 متر. أوجد سرعة مركز العجلة الهندسي عند دورانها نصف دورة بالاتجاه الموجب، وذلك إذا ما ابتدأ النظام الحركة من السكون. نصف قطر تدويم العجلة بالنسبة للمحور الأفقي المار في مركز كتلتها $\rho_C = 0.2$ [m] ونصف قطر العجلة R=0.32[m]، $m_A = 20$[kg] و $m_B = 4$ [kg].

الحل

تتدحرج العجلة إلى اليسار تحت تأثير قوة شدّ الزنبرك للمسافة $\Delta x_o = 0.8$ متر، **الرسمان 1** و 4، وبالتالي فإزاحة النظام الأفقية محددة. وبينما يتطلب حل السؤال معرفة السرعة الزاوية للعجلة لحظة إنهائها الإزاحة المذكورة فإن ذلك يستدعي استخدام قانون تغير الطاقة الحركية للنظام، والمعادلة 59.8 بالتحديد. فنكتب

$$T - T_o = A_i + A_e \qquad 1$$

فنبدأ بتحليل عناصر هذه المعادلة. كان النظام ساكناً لحظة بداية الحركة، ولذلك فطاقته الحركية الابتدائية تساوي الصفر

$$T_o = 0 \qquad 2$$

وتتحدد طاقة حركة النظام في اللحظة النهائية بالمجموع الجبري لطاقات أجزائه المكونة له : العجلة C والثقل B

$$T = T_C + T_B \qquad 3$$

تتحرك العجلة حركة مستوية ، فطاقتها الحركية لحظة إنهائها نصف دورة ، معادلة 57.8

$$T_C = 0.5\, I_{Cx}\, \omega^2 + 0.5\, M\, v_C^2 \qquad 4$$

حيث ω سرعتها الزاوية النهائية بينما I_{Cx} عزم قصور العجلة بالنسبة لمركز كتلتها C

$$I_{Cx} = M \rho^2 = 20 \times 0.2^2 = 0.8 \text{ [kg m}^2\text{]} \qquad 5$$

سرعة مركز كتلة العجلة ، **رسم 3**

$$v_C = PC \times \omega = 0.12\, \omega \qquad 6$$

وبتعويض القيم 5 و 6 في المعادلة 4 ينتج أن طاقة حركة النظام

$$T_C = 0.5 \times 0.8\, \omega^2 + 0.5 \times 20 \times 0.12^2\, \omega^2 = 0.544\, \omega^2 \text{ [J]} \qquad 7$$

تتحدد طاقة حركة الجسم B ، حركته انتقالية فقط من المعادلة 52.8

$$T_B = 0.5\, m_B\, v_B^2 \qquad 8$$

حيث تساوي سرعة صعود الجسم B سرعة نقطة التلامس العلوية للعجلة، **رســـم 3**

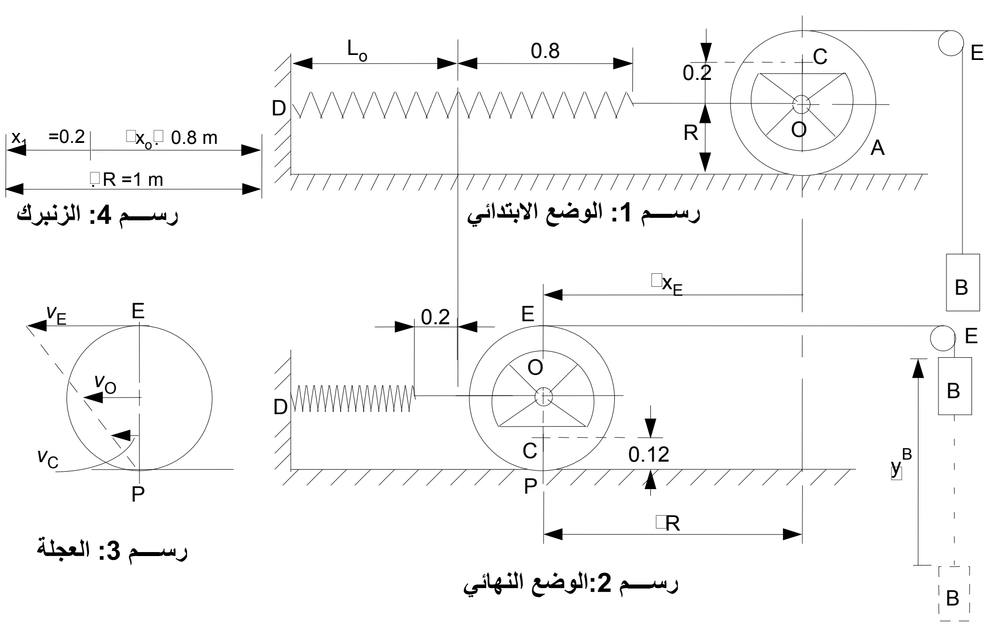
$$v_B = v_E = 0.64\ \omega$$

لأن P تمثل المركز اللحظي للسرعات . وباستبدال $v_B = 0.64\,\omega$ ، في المعادلة 8 ينتج أن

$$T_B = 2 \times (0.64\ \omega)^2 = 0.8192\ \omega^2\ [J] \qquad 9$$

وبجمع الحدّين 7 و 9 ينتج أن طاقة حركة النظام

$$T = 1.3632\ \omega^2 \qquad 10$$



شـــكل م 22.8

ولحساب الشغل المبذول من القوى المؤثرة الخارجية والداخلية نبدأ بشغل القوة الداخلية المساوي للصفر $A_i = 0$، بينما شغل القوى الخارجية المؤثرة

$$A_e = A_C + A_B + A_S \qquad 11$$

الشغل المبذول من قوة وزن العجلة نتيجة الإزاحة الرأسية بالمقدار $\Delta y_C = 2 \times 0.2 = 0.4[m]$ يبلغ

$$A_C = M\, g\, \Delta y_C = 20 \times 9.8 \times 0.4 = 78.4\ [J] \qquad 12$$

والشغل المبذول على (الذي يخسره) الثقل B لاكتسابه الإزاحة الرأسية Δy_B، **رســـم 2**

$$A_B = m_B\, g\, \Delta x_E = 4 \times 9.8 \times -2\, R\, \pi = = -78.4\ [J] \qquad 13$$

وأخيرًا ، الشغل المبذول من قوة الزنبرك يتطلب معرفة إزاحة مركز العجلة الهندسي

$\Delta x_o = 0.8$ [m]

$x_1 = \Delta x_o - R\pi = 0.8 - 0.32\pi = -0.2$ [m]

$$A_S = \frac{c}{2}\left[(\Delta x_o)^2 - (x_1)^2\right] = \frac{164}{2}\left[0.8^2 - (-0.2)^2\right]$$

$A_S = 49.2$ [J] 14

وبالتالي فالشغل الكلي للنظام يتم بجمع 12-14 لينتج أن

$A = 49.2$ [J] 15

وبربط المعادلتين 10 و 12 مع بعض ينتج أن

$1.3632\ \omega^2 = 49.2$

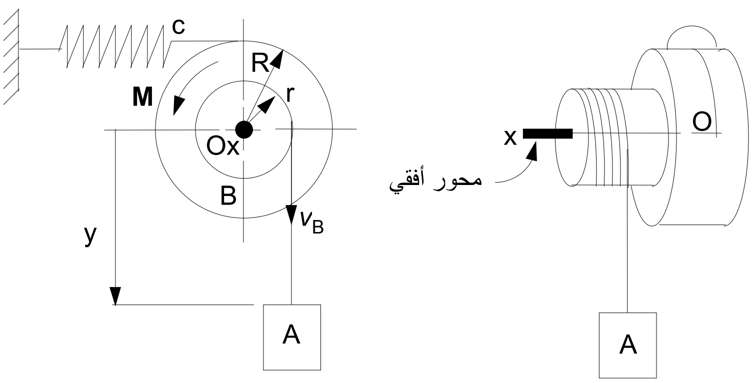
$\omega = 6$ [rad / s] , $\omega = 6\,\boldsymbol{k}$[rad / s] 16

ومنها نجد أن سرعة مركز العجلة الهندسي

$v_o = R \times \omega = 0.32 \times 6 = 1.92$ [m /s] 17

ســـؤال م 23.8

يتكون الدولاب B، من اسطوانتين متداخلتين بعضهما مع بعض باحكام، نصف قطره التدويمي $\rho_x = 0.4$ متر بينما نصفا قطره الهندسيين $R = 2r = 1$ [m]. وعندما يبدأ الجسم A المعلق بحبل يلتف حول اسطوانة الدولاب الصغرى الحركة للأسفل بسرعة 6 متر/ثانية، يتأثر الدولاب بعزمٍ دوراني **M**، بينما يكون الزنبرك لحظتها مشدوداً بالمقدار 0.1 متر. أوجد مقدار إزاحة الجسم A للأسفل عندما يتوقف النظام عن الحركة. اعتبر $m_A = 20$[kg] و $m_B = 100$ [kg] ، ثابت الزنبرك $c = 200$ [N.m] وأخيراً العزم الدوراني $\mathbf{M} = 358\,\boldsymbol{i}$ [N m]



شـــكل م 23.8

الـــحـــل

عندما يتحرك الجسم A للأسفل، يتحرك الدولاب B باتجاه عقارب الساعة، وهذا يؤدي إلى سحب الزنبرك لليمين فيشده أكثر. وبينما يتطلب حل السؤال معرفة إزاحة الجسم المعلق A فإن ذلك يستدعي استخدام قانون تغير الطاقة الحركية للنظام، معادلة 58.8 بالتحديد. فنكتب

$$T - T_o = A \qquad 1$$
$$T = T_A + T_B$$

طاقتا حركة الجسم A في اللحظتين الابتدائية والنهائية

$$T_{Ao} = 0.5\, m\, v^2 \quad , T_A = 0.5\, m\, v_f^2 ,$$
$$T_{Ao} = 0.5 \times 20 \times 6^2 = 360\ [\,J\,],\ v_f = 0 \ \Rightarrow T_A = 0 \qquad 2$$

وطاقتا حركة الدولاب B في اللحظتين الابتدائية والنهائية

$$T_{Bo} = 0.5\, I_{Ox}\, \omega^2 \ , \quad T_B = 0 \qquad 3$$

حيث I_{Ox} عزم قصور الدولاب حول المحور Ox و ω السرعة الزاوية لدوران الدولاب

$$I_{Ox} = M\, \rho^2 = 100 \times 0.4^2 = 16\ [kg\ m^2]$$
$$\omega = \frac{v_{Bo}}{r} = \frac{6}{0.5} = 12\ [rad / s]$$

وبتعويض ذلك في المعادلة 3 ينتج أن

$$T_{Bo} = 0.5 \times 16 \times 12^2 = 1152\ [J] \quad , T_B = 0 \qquad 4$$

الفرق في الطاقة الحركية بلغ

$$\Delta T = T - T_o = 0 - 360 - 1152$$
$$\Delta T = -1512 \ [\,J\,] \qquad 5$$

أمّا الشغل الناتج من القوى المؤثرة على النظام فيتحدد بالمعادلة

$$A = A_A + A_B + A_S \qquad 6$$

الشغل المبذول (المكتسب) من قوة وزن الثقل المعلق

$$A_A = m\, g\, y = 20 \times 9.8\, y \qquad \Rightarrow A_A = 196\, y \qquad 7$$

والشغل الذي يخسره العزم الدوراني **M** (بعكس الحركة)

$$A_B = -M\, \varphi = -M\, y / r = -358\, y / 0.5 \ \Rightarrow A_B = -716\, y \qquad 8$$

ولأن الزنبرك يزداد طوله ، مبتعداً عن وضع الاستقرار فإنه يخسر شغلاً

$$A_S = \frac{c}{2}\left[(\Delta x_o)^2 - (x_1)^2\right] = \frac{200}{2}\left[0.1^2 - (0.1 + 2\,y)^2\right]$$
$$A_S = -40\, y - 400\, y^2 \qquad 9$$

وباستبدال كلّ من A_A ، A_M و A_S بقيمها من المعادلات 7-9 ، وتعويضها في المعادلة 6 ينتج أن الشغل الكلي

$$A = 196\, y - 716\, y - 40\, y - 400\, y^2$$
$$A = -560\, y - 400\, y^2 \qquad 10$$

ومساواة هذا مع فرق الطاقة ، معادلة 5 ينتج المعادلة

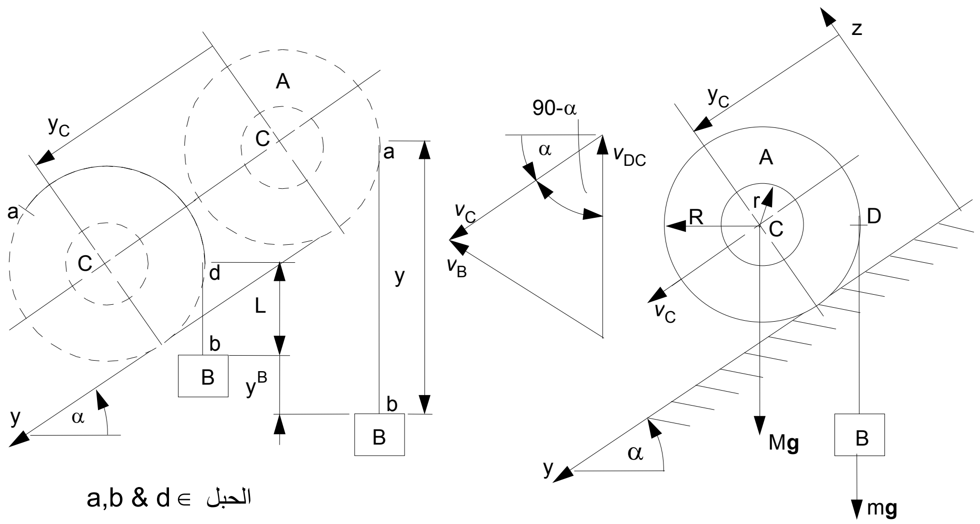
$$y^2 + 1.4\, y - 3.78 = 0$$

والذي يعطي حلها

$$y = 1.366\ [m] \qquad 11$$

ســؤال م 24.8

تتدحرج الإسطوانة المتجانسة A والمفرغة من الداخل بدون انزلاق على سطحٍ مائلٍ، زاوية ميله α. ويلتف حولها حبلٌ، يرتبط بطرفه الآخر الثقل B. أوجد سرعة مركز الإسطوانة بدلالة إزاحته إذا ما تحرك النظام من السكون ؟ كتلة الإسطوانة M وكتلة الثقل m . نصفا قطري الإسطوانة r و R.



شـــكل م 24.8

الحــــل

تتكون طاقة حركة النظام من مجموع طاقات حركة جميع عناصره، الإسطوانة A والثقل B

$$T = T_A + T_B \qquad 1$$

إذ تتحرك الإسطوانة حركةً مستويةً ، ولذلك فطاقتها الحركية مكونةً من الجزأين الانتقالي والدوراني

$$T_A = T_{tran} + T_{rot} = 0.5\, M\, v_C^2 + 0.5\, I_{Cx}\, \omega^2 \qquad 2$$

حيث I_{Cx} عزم قصور الإسطوانة المفرغة حول المحور Cx المار في مركز كتلتها

$$I_{Cx} = \frac{1}{2} M\,(R^2 - r^2) \qquad 3$$

بينما ω السرعة الزاوية

$$\omega = v_C / R \qquad 4$$

وباستبدال I_{Cx} من المعادلة 3 و ω من المعادلة 4 وتعويضهما في المعادلة 2 ينتج أن

$$T_A = \frac{M}{4}\left\{3 - \frac{r^2}{R^2}\right\} v_C^2 \qquad 5$$

الطاقة الحركية للثقل B

$$T_B = 0.5\, m\, v_B^2 \qquad 6$$

حيث إن سرعة الثقل B تساوي سرعة نقطة التماس مع الإسطوانة D ، انظر الرسم السهماني للسرجهات

$$\therefore\ \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{DC} \ \Rightarrow\ v_{DC} = R\, d\varphi / dt = v_C$$

$$v_B^2 = v_C^2 + v_{DC}^2 - 2\, v_C\, v_{DC} \cos(90 - \alpha)$$

$$v_B^2 = v_D^2 = 2\, v_C^2\, (1 - \sin\alpha) \qquad 7$$

وباستبدال ذلك في المعادلة 6 ينتج أن طاقة حركة الثقل B تبلغ

$$T_B = m\, v_C^2\, (1 - \sin\alpha) \qquad 8$$

وعليه فطاقة حركة النظام تتكون من جمع العلاقتين 5 و 8

$$T=\left\{\frac{M}{4}\left\{3-\frac{r^2}{R^2}\right)\right\}+m\,(1-\sin\alpha)\right\}v_C^2 \qquad 9$$

الشغل المبذول من القوى المؤثرة

$$A=A_A + A_B \qquad 10$$

الشغل الناتج من قوة وزن الإسطوانة

$$A_A = M\,g\,y_C \sin\alpha \qquad 11$$

بينما شغل قوة وزن الثقل B

$$A_B = -\ m\,g\,(1-\sin\alpha)\ y_C \qquad 12$$

وبالتالي فالشغل الكلي

$$A=\{(M+m)\sin\alpha\ -\ m\}\,g\,y_C \qquad 13$$

وأخيراً باستخدام قانون تغير الطاقة الحركية $\Delta T=A$ ، والعلاقتين 9 و 13 حيث $T_o=0$ ، لتحرك النظام من السكون ، ينتج أن

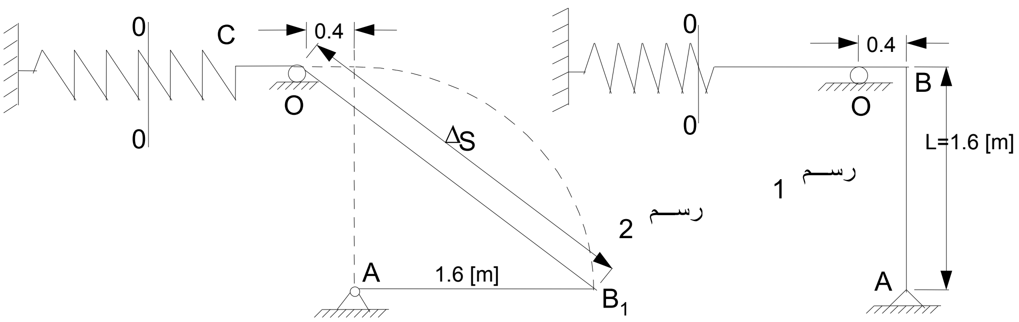
$$\left\{\frac{M}{4}\left\{3-\frac{r^2}{R^2}\right)\right\}+m\{1-\sin\alpha\}\right\}v_C^2=\{(M+m)\sin\alpha\ -\ m\}\,g\,y_C$$

وحل هذا الناتج كدالة سرعة v_C وإزاحة y_C

$$v_C=\sqrt{4\,g\,\frac{(M+m)\sin\alpha-m}{4\,m(1-\sin\alpha)+M\left\{3-{r^2}/{R^2}\right\}}\,y_C} \qquad 14$$

سـؤال م 25.8

يتحرك القضيب المتجانس AB ، طوله 1.6 متر وكتلته 40 كيلوغرام ، بسرعةٍ زاويةٍ تساوي 3.6 دائرية لكل ثانية عندما كان الزنبرك مشدوداً بالمقدار 0.4 متر عن وضع الاستقرار ، **رسـم 1**. أوجد : معامل المرونة الأكبر للزنبرك حتى يأخذ القضيب وضعاً أفقياً بالاتجاه السالب، وما سرعة القضيب الزاوية لحظة وصول طرفه B للوضع الأفقي، الرسم على اليسار؟ معامل مرونة الزنبرك $c = 40$ [N/m] .



شـكل م 25.8

الـحـــل

نستخدم قانون تغير الطاقة الحركية للجسم الجاسئ - القضيب بين وضعيه العمودي والأفقي ، فنكتب

$$T\ -\ T_o\ =\ A \qquad 1$$

الطاقة الحركية للوضع العمودي - الابتدائي

$$T_o = 0.5\ I_{Ax}\,\omega_o^2 = 0.5 \times 34.13 \times 3.6^2 = 221.16\ [\ J\ ] \qquad 2$$

حيث إن I_{Ax} عزم قصور القضيب حول المحور Ax

$$I_{Ax} = M\,L^2 / 3 = 40 \times 1.6^2 / 3 = 34.13\ [\ kg\ m^2\ ]$$

وعلى نفس المنوال نحسب الطاقة الحركية للوضع النهائي للنظام - الأفقي AB_1

$$T = 0.5 \times 34.13 \times \omega_1^2$$

$$T = 17.07\ \omega_1^2 \qquad 4$$

ولحساب الشغل المبذول من القضيب نتيجة إزاحته والشغل المفقود من الزنبرك نتيجة استطالته، نحدد أولاً الإزاحتين، Δy_C لمركز كتلة القضيب و ΔS للزنبرك

$$\Delta y_C = 0.8\ [\ m\ ]\ ,\ OB1 = \Delta S = 2.56\ [\ m\ ]$$

وعليه يكون الشغل الناتج من وزن القضيب

$$A_{AB} = M\,g\,\Delta y = 40 \times 9.8 \times 0.8 = 313.6\ [\ J\ ] \qquad 5$$

بينما الشغل الذي يخسره الزنبرك

$$A_S = \frac{c}{2}\left[\left(\Delta S\right)^2 - 0.4^2\right] = \frac{c}{2}\left[2.56^2 - 0.4^2\right] = 3.197\ c[\ J\ ] \qquad 6$$

وبربط العلاقات 2 - 6 مع المعادلة 1 ينتج أن

$$17.07\ \omega_1^2 - 221.16 = 313.6 - 3.197\ c \qquad 7$$

وحتى يصل القضيب للوضع الأفقي فإنّ قيمة ω_1 يجب أن تكافئ الصفر ، ومعادلة 7 تؤول إلى

$$3.197\ c_{max} = 534.76\ [\ J\ ] \qquad 8$$

أي أن معامل مرونة الزنبرك

$$c_{max} = 167.32\ [\ N / m\ ] \qquad 9$$

أما إذا أستبدلنا c = 40 نيوتن لكل متر في المعادلة 7 ، فإن السرعة الزاوية تأخذ القيمة

$$\omega_1 = 4.88\ [\ rad / s] \qquad 10$$

9.8 مـــبــدأ دالـــمـــبـــيـــر لنظام الجسيمات المقيد

يمكن تعريف وكتابة المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد استناداً إلى **مــبــدأ دالـــمـــبـــيـــر.** إذ يجب تحرير الجسيم من قيده، وإضافة قوة رد فعله وقوة قصوره المناظرة إلى القوة المؤثرة على الجسيم والتي يساوي مجموعها الهندسي صفراً. لنعتبر نظاماً، ذا فئة جسيمات عددها n، والجسيم *i*، كتلته m_i من هذا النظام، مختارٌ بشكلٍ اعتباطي. تؤثر على الجسيم القوة الخارجية $\mathbf{F}_i$ وقوة رد فعل القيد R_i . فطبقاً لـــ **مـــبـــدأ دالـــمـــبـــيـــر** أو معادلة 54.4 بعد إضافة الرمز *i* لمتغيراتها يكون

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i,\text{in}} + \mathbf{R}_i = 0 \qquad 61.8$$

وبتكرار العملية لكل جسيمات النظام، وجمع المعادلات الناتجة حداً حداً نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{i,\text{in}} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i = 0 \qquad 62.8$$

أو

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{in}} + \mathbf{R} = 0 \qquad 63.8$$

حيث إن **F** محصلة (المتجه الرئيسي لكل) القوى الخارجية المؤثرة على نظام الجسيمات $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$ ، و **R** محصلة ردود أفعال القيود الخارجية المؤثرة علىالنظام $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i$ ، وأخيراً $\mathbf{F}_{\text{in}}$ محصلة قوى قصور جسيمات النظام $\mathbf{F}_{\text{in}} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{i,\text{in}}$. هاتان المعادلتان 62.8 و 63.8 تمثلان **مبدأَ دالمبير** لنظام الجسيمات المقيد: **في كل لحظةٍ زمنيةٍ أثناء حركة النظام المقيد يكون المجموع الهندسي للمتجهات الرئيسية الثلاث، القوة الخارجية F وقوة رد فعل القيود الخارجية R المؤثرتان على نظام الجسيمات المتحرك وقوةَ قصوره $\mathbf{F}_{\text{in}}$ مساوياً للصفر.**

من جهةٍ أخرى؛ إذا حدِّد متجه موضع الجسيم *i* بالمتَّجه $\mathbf{r}_i$، المقاس من مركز الإطار القصوري الثابت O؛ فإن حاصل ضرب هذا المتجه في المعادلة الإتجاهية 62.8 من الجهة اليسرى يكون

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,\text{in}} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i = 0 \qquad 64.8$$

أو بشكلٍ مختصر

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_{\text{in}} + \mathbf{M}_R = 0 \qquad 65.8$$

حيث أن $\mathbf{M}_F$ عزم الدوران الرئيسي لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على نظام الجسيمات $\mathbf{M}_F = \mathbf{F} \times \mathbf{r}_F$، ويساوي محصلة عزوم الدوران لكل القوى الخارجية المؤثرة على جسيمات النظام بالنسبة للمركز الثابت O، $\mathbf{M}_F = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i$ و $\mathbf{M}_R$ العزم الرئيسي لمحصلة ردود أفعال القيود الخارجية $\mathbf{M}_R = \mathbf{R} \times \mathbf{r}_R$ ، ويساوي محصلة

عزوم كل ردود أفعال القيود الخارجية المؤثرة على النظام بالنسبة للمركز الثابت $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times \mathbf{r}_i$ ، وأخيراً $\mathbf{M}_{in}$ العزم الرئيسي لمحصلة كل قوى قصور جسيمات النظام $\mathbf{M}_{in} = \mathbf{F}_{in} \times \mathbf{r}_i$، ويساوي محصلة عزوم كل قوى قصور جسيمات النظام بالنسبة للمركز الثابت $\mathbf{M}_{in} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i,in} \times \mathbf{r}_i$. ولهذا ؛ استناداً إلى المعادلة 5 يمكن القول:

في كل لحظةٍ زمنيةٍ أثناء حركة النظام المقيد يكون المجموع الهندسي لعزم الدوران الرئيسي للقوى المؤثرة $\mathbf{M}_F$ والعزم الرئيسي لقوى ردود أفعال القيود الخارجية $\mathbf{M}_R$ المؤثرة على النظام المتحرك مضافاً إليهما العزم لقوى قصوره $\mathbf{M}_{in}$ مساوياً للصفر.

ويمكن دراسة الحالة الخاصة لمعادلة 63.8، وذلك لنظام الجسيمات غير المقيد بقيودٍ خارجية، حينئذٍ؛ يتلاشى المجموع الثالث، $\mathbf{R} = 0$. وتؤول نفس المعادلة إلى الشكل المختصر

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = 0 \qquad 66.8$$

كما يتلاشى المجموع الثالث في المعادلة 65.8، $\mathbf{M}_R = 0$، وتؤول المعادلة المذكورة إلى الشكل التالي

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_{in} = 0 \qquad 67.8$$

حيث تمثل المعادلة 66.8 قانون نيوتن الثاني لنظام الجسيمات الحر، لتكافئ أيٍ من المعادلتين 9.8 أو 10.8، بينما تمثل المعادلة 67.8 قانون تغير الزخم الزاوي لنظام الجسيمات، والتي تكافئ المعادلة 46.8.

إن استخدام المعادلتين 63.8 و 65.8 المستنبطتين من مبدأ دالمبير يسهل عملية حل المسائل لإنهما لا تحتويان أيةَ قوىً داخلية. إذ إن محصلة القوى الداخلية ومحصلة عزومها حول مركز أطر الإسناد القصورية يساوي الصفر. أما المعادلتان 66.8 و 67.8 فهما مناسبتان لدراسة الجسم الجاسئ أو نظام الأجسام الجاسئة، ولا تعتبر المعادلتان نفسهما كافيتين لدراسة حركة النظام المتغير زمنياً دراسةً وافية. إن استخدام مبدأ دالمبير يساعد على حل الكثير من مسائل النظام المقيد، كإيجاد ردود أفعال القيود الخارجية، وذلك من مساقط المعادلتين 63.8 و65.8. أما إيجاد ردود الأفعال الداخلية، فيتطلب الأمر فصل كل الجسيمات ودراسة كل جسيم على حدة.

أسـئلـةٌ مـحـلـولـة

سـؤال م 26.8

حل **سـؤال م 18.8** بدون العزم الدوراني. واحسب الشدّ S في الخيط باستخدام مبدأ دالمبير للنظام.

الـحـل

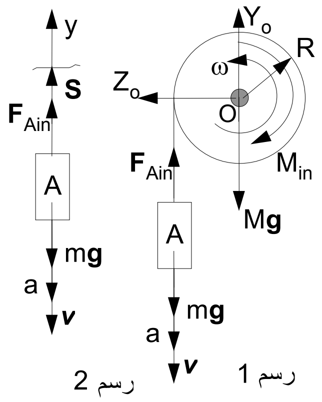
يتكون النظام من الثقل المعلق A ، حركته انتقالية في خطٍ مستقيم والإسطوانة التي تدور حول المحور الثابت، حركتها دورانيةً. يؤثر على النظام الوزنان $m_A g = mg$ و $m_D g = Mg$، وكلاهما للأسفل، وقوة ردِّ الفعل في محور الدوران التي تحلل إلى المركبتين Y_o و Z_o . نضيف للقوى الأربعة الواردة أعلاه قوىً قصوريةً كما يلي: يتحرك الثقل المعلق بتسارعٍ a للأسفل، لذلك تكون قوة قصوره مؤثرةً للأعلى

$F_{Ain} = -ma_A$ 1

كما يؤثر على الإسطوانة الدائرة ازدواجٌ قصوري - العزم

$M_{in} = -I_O\,\varepsilon\,\boldsymbol{i}$ 2

عزم الدوران الرئيسي للقوى الفاعلة حول محور الدوران



شـكل م 26.8

$M_F = m_A g R = m g R$ 3

والعزم الرئيسي لقوى القصور حول محور الدوران

$M_{in} = -mR^2\varepsilon - I_O\varepsilon$ 4

حيث إن العزم الرئيسي لقوتي ردّ الفعل **R** ، المركبتين X_o و Y_o حول المحور Ox يساوي صفراً .

$M_R = 0$ 5

وباستبدال العلاقات 3-5 في المعادلة الرئيسية 65.8 نحصل على

$mgR - mR^2\varepsilon - I_O\varepsilon = 0$ 6

وحيث $R\varepsilon = a_A = a$ و $I_O = 0.5\,MR^2$ فإن استبدالهما في المعادلة 6 يبين أن التسارع يكون

$$a_A = a = \frac{2m}{2m+M}g$$ 7

وهي تكافئ المعادلة 8، **سـؤال م 18.8** (بدون تأثير عزم الدوران). حل المعادلة 7 للشروط الإبتدائية نفسها يعطي

$$y = \frac{m}{M+2m}gt^2$$ 8

لحساب الشد، نحرر طرف الخيط والثقل المعلق A، **رسم 2**، ونعرف قوة الشد بالرمز **S**، مبقين القوة الفاعلة mg والقصورية F_{Ain} كما في الحالة الأولى. نكتب المعادلة 63.8 آخذين بالاعتبار الاتجاه $\boldsymbol{j}$ للأعلى

$-mg + F_{in} + S = 0$ 9

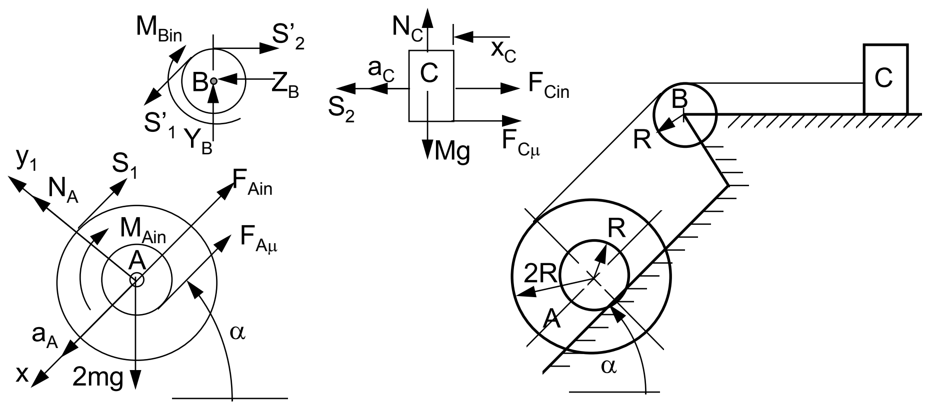
$$S = mg - F_{in} = mg - ma$$

وباستبدال التسارع a من المعادلة 7 نجد أن الشدّ في الخيط

$$S = \frac{Mm}{2m+M}g$$ 10

سـؤال م 27.8

تتدحرج العجلة A بدون إنزلاقٍ على سطحٍ مائل وتسحب معها الثقل C الذي يتحرك على سطحٍ أفقيٍ خشن، معامل احتكاكه μ، بواسطة البكرة الملساء B المثبتة في أعلى المستوى المائل. أوجد تسارع الثقل C للمعطيات التالية: تتكون العجلة A من اسطوانتين متداخلتين ومحكمتا التركيب، أنصاف أقطارهما R و 2R، ونصف قطر تدويمها يساوي ρ = R، ويميل السطح بالزاوية α عن الأفقي $m_A = 2m$ و $m_C = M$, $m_B = m$.



شـكل م 27.8

الحـــل

نفصل عناصر النظام إلى أجزائه A، B و C، ونحدّد القوى الفاعلة والقصورية على كلٍّ جزء.

العجلة A

تؤثر عليها قوة وزنها 2mg للأسفل، قوة ردّ الفعل N_A عموديةً على السطح المائل وقوة الإحتكاك $F_{A\mu}$ بعكس الحركة، مضافاً إلى كلِّ ذلك الشدُّ في الخيط S_1. كما يؤثر على العجلة قوة القصور F_{Ain} بعكس اتجاه التسارع a_A والعزم الرئيسي لقوى القصور M_{Ain}

$$F_{Ain} = 2ma_A \quad \& \quad M_{Ain} = I_A \varepsilon_A = 2m R^2 \varepsilon_A$$

البكرة الملساء B

تؤثر عليها قوة وزنها mg للأسفل، قوة ردّ الفعل R_A ، $\mathbf{R_B = Y_B + X_B}$، والشدُّ في الخيط S'_1، $S'_1 = S_1$ من ناحية العجلة A والشد الآخر S'_2 من جهة الثقل C، $S'_2 = S_2$ كما يؤثر على البكرة عزم القصور M_{Bin}، $M_{Bin} = I_B\varepsilon_B$، بعكس الدوران

الثقل C

تؤثر عليه قوة وزنه Mg للأسفل، قوة ردّ الفعل N_C عمودياً على السطح للأعلى وقوة الإحتكاك $F_{C\mu}$ بعكس الحركة، $F_{C\mu} = \mu Mg$. مضافاً إلى كلِّ ذلك الشدُّ في الخيط S_2. وأخيراً يؤثر على الثقل قوة القصور F_{Cin} بعكس اتجاه التسارع a_C.

نكتب معادلات دالمبير: معادلتا القوى والعزوم 61.8 و 65.8 لعناصر النظام الثلاثة:

العجلة A

$$2\,m\,g \sin\alpha - F_{A\mu} - S_1 - F_{Ain} = 0 \qquad 1$$

$$N_A - 2\,m\,g \cos\alpha = 0 \qquad 2$$

$$F_{A\mu} R - 2\,S\,R - M_{Ain} = 0 \qquad 3$$

البكرة B

$$R\,(S_1 - S_2) - M_{Ain} = 0 \qquad 4$$

الثقل C

$$S_2 \ - \ F_{C\mu} \ - \ F_{Cin} = 0 \qquad 5$$

ولدرجة حريةٍ واحدة للنظام (العجلة A تتدحرج بدون انزلاق) نكتب

$$a_A = R\ddot{\varphi}_A = R\varepsilon_A \ \ \& \ \ 3R\varepsilon_A = \ddot{x}_D = \ddot{x}_C = a_C \qquad a$$

$$\therefore \ \varepsilon_A = \frac{a_C}{3R} \qquad b$$

وتبعاً لذلك يكون

$$F_{Ain} = 2\,m\,a_A = \frac{2}{3} m\,a_C \qquad c$$

$$F_{Cin} = M a_C \qquad d$$

وباستبدال العلاقات a - d في المعادلات 1-5 ثُمَّ كتابة الأخيرة بعد جملةٍ من الاختصارات

$$2\,m\,g\sin\alpha \ - \ F_{A\mu} \ - \ S_1 \ - \ \frac{2}{3} m\,a_C = 0 \qquad 6$$

$$F_{A\mu} \ - \ 2\,S_1 \ - \ \frac{2}{3} m\,a_C = 0 \qquad 7$$

$$S_1 \ - \ S_2 \ - \ \frac{1}{2} m\,a_C = 0 \qquad 8$$

$$S_2 \ - \ \mu\,Mg \ - \ M\,a_C = 0 \qquad 9$$

هذه المعادلات الأربعة 6 - 9 ذات أربعة مجاهيل: a_C، S_1، S_2 و $F_{A\mu}$. وتحل بواسطة نظرية المحدّدات matrices theory لمن يمتلك ناصيتها. على كلٍّ حال، سنحل هذا السؤال بطريقة تنحية المتغيرات واحداً واحداً. فنبدأ بتنحية المتغيِّر $F_{A\mu}$ من المعادلتين 6 و7 فنحصل على معادلةٍ واحدةٍ منهما. وهكذا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

$$2S_1 \ - \ 2\,S_2 \ - m\,a_C = 0 \qquad 8$$

$$S_2 \ - \ \mu\,Mg \ - \ M\,a_C = 0 \qquad 9$$

$$6\,m\,g\sin\alpha \ - \ 9\,S_1 \ - 4\,m\,a_C = 0 \qquad 10$$

حلها يكون

$$a_C = 6\frac{2m\sin\alpha - 3M\mu}{17m + 18M} g \qquad 11$$

$$S_1 = 2\,\frac{4M\mu + 3(2M + m)\sin\alpha}{17m + 18M} m g \ \& \qquad 12$$

$$S_2 = \frac{(17\mu + 12\sin\alpha)m}{17m + 18M} Mg \qquad 13$$