الباب السابع

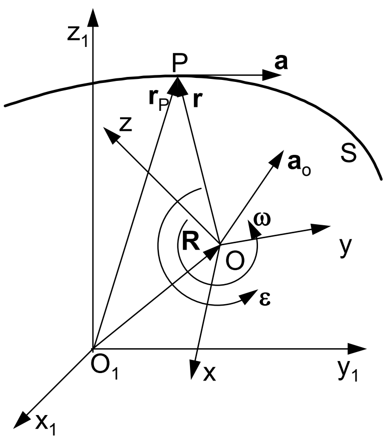
حركة الجسيم النسبية RELATIVE MOTION OF A PARTICLE

1.7 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم النسبية

بحثنا في الأبواب السابقة حركتي الجسيم الحرة والمقيدة، وذلك بالاعتماد على قوانين نيوتن والقوانين المستنبطة منها. وقد أدركنا أن استخدام قوانين نيوتن يستلزم الحركة المطلقة فقط؛ أي الحركة بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري.

هذا الباب سنُخَصِّصه لدراسة حركة الجسيم بالنسبة لأُطُرِ إسنادٍ متحركةٍ اعتباطياً (لنقل بتسارعٍ معين) بالنسبة لأطرِ إسنادٍ قصورية، **شكل 1.7**. عندئذٍ، ندعو حركة الجسيم المذكور (العامة) بالنسبة لأُطُرِ الإسناد المتحركة Oxyz الحركة النسبية للجسيم.

لنتخيل إطار الإسناد Oxyz الذي يتحرك بشكلٍ ما بالنسبة لإطارِ الإسناد الثابت $Ox_1y_1z_1$. أي أنه في كلِّ لحظةٍ زمنية يكون معلوماً لدينا التسارع المطلق $\mathbf{a}_o$ للنقطة O، السَرْعَةُ الزَّاوِيّة ω، والتَسارُعُ الزَّاوِيُّ ε لإطار الإسناد المتحرك (الجسم المتحرك) بالنسبة لإطار الإسناد الثابت. إذا تحددت للجسيم P محصلة القوى المؤثرة عليه بالمتَّجِه **F**، وتحددت الشروط الابتدائية لحركته بالنسبة لإطار الإسنادِ المتحرك أيضاً، فإن مسألة ديناميكا الجسيم النسبية تتحدد بتكوين المعادلة التفاضلية للحركة النسبية للجسيم P ومن ثم حلها (أي إجراء تكاملها). فمن قانون نيوتن الثاني نكتب معادلة حركة الجسيم (المطلقة) P



شــكل 1.7

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad 2.3$$

حيث إن **a** متَّجِه التسارع المطلق للجسيمP. وكما هو معروفٌ من الكَيْنَمَاتيكا، يساوي التسارع المطلق محصلة مركباته المكتسبة والنسبية والكوريوليسية، معادلة 97.2

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_{r} + \mathbf{a}_{cor} \qquad 97.2$$

لنحصل بعد تعويض هذه المركبات في المعادلة 2.3 وحل الناتج بدلالة $m\mathbf{a}_r$ أن

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{tr} - m\,\mathbf{a}_{cor}$$

وإذا دعونا الكميات المتَّجِهة $-m\mathbf{a}_{tr}$ و $-m\mathbf{a}_{cor}$ بقوتي القصور المكتسبة $\mathbf{F}_{tr,in}$ والقصور الكوريوليسية $\mathbf{F}_{cor,in}$ على الترتيب، وذلك قياساً على المعادلة 48.4، فإن استبدال هذه القوى المستحدثـــةِ في المعادلة السابقة يمكننا من كتابتها بالشكل الجديد

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 1.7$$

لتدعى بالمعادلة التفاضلية لحركة الجسيم النسبية. وهي شبيهةٌ للمعادلة 2.3 للحركة المطلقة إذا أضيفت قوتا القصور المكتسبة والقصور الكوريوليسية إلى القوة **F** المؤثرة على الجسيم، وذلك نتيجةً للتأثير الناتج من الحركة المكتسبة. وسندرس بعض الحالات الخاصة التالية:

1- حركة إطار الإسناد المتحرك دورانية، عندئذ يتكون التسارع المكتسب من المركبتين النِّصْقطرِية a_{trt} والمماسية a_{trn}، $a_{tr} = a_{trn} + a_{trt}$. ولتؤول المعادلة الأخيرة إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trn,in} + \mathbf{F}_{trt,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 1.1.7$$

وإذا كانت الحركة الدورانية المكتسبة منتظمة، تكون السرعة الزاوية ثابتةً $\omega_{tr} = const.$، عندئذٍ يكافيء التسارع المكتسب التسارع العمودي فقط، $a_{tr} = a_{trn}$. والمعادلة 1.1.7 تصبح

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trn,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 2.1.7$$

2 - حركةُ إطارِ الإسنادِ المتحرك انتقالية غير منتظمة وفي خطٍ منحنٍ. عندئذ تكون السرعة الزاوية المكتسبة صفراً، $\omega_{tr} = 0$، وتبعاً لذلك، يتلاشى كلاً من التسارعين المكتسب (العمودي)، أي $\mathbf{a}_{trn,in} = 0$، والكوريوليسي، أي $\mathbf{a}_{cor} = 0 \Leftarrow$ $\mathbf{F}_{trn,in} = \mathbf{F}_{cor,in} = 0$. ولتؤول المعادلة 1.7 إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trt,in} \qquad 3.1.7$$

أخيراً، إذا كانت حركة إطار الإسناد المتحرك انتقالية، منتظمة وفي خط مستقيم، عندئذ يكون $a_{tr} = 0$ لأن $\omega_{tr} = 0$، و $a_{cor} = 0$. وتؤول المعادلة 1.7 إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} \qquad 4.1.7$$

والتي تكافيء المعادلة الاتجاهية 2.3 لحركة نفس الجسيم تحت تأثير القوة بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري. إن هذا يعني أن قوانين الحركة واحدة في سائر أطر الإسناد القصورية، حيث أدرك هذا **نيوتن** و**غاليلو** من قبله. ودُعي هذا المبدأ باسم الأخير مبدأ النسبية الغاليلية Principle of Galilean Relativity. إن هذا لا يعني أن وصف حركة ما سيكون متطابقاً في سائرِ أُطُرِ الإسناد المختلفة بل سيكون واحداً، فقط في أُطُرِ الإسناد القصورية المختلفة.

2.7 الإستقرار (السكون) النِّسْبيّ على سطح الأرض

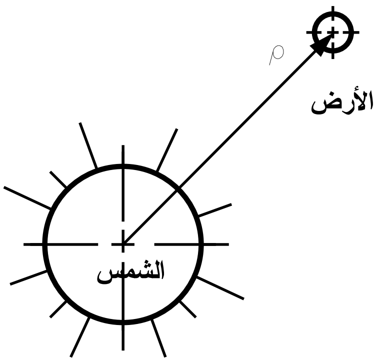
يعتبر الجسم حال سكونه (عدم حركته) على سطح الأرض مستقراً نسبياً دون اعتبارٍ لدوران الأرض حول محورها وحول الشمس. كما يعتبر نفس الجسم السابق في حالاتٍ أخرى متحركاً لاكتسابه حركة الأرض الدورانية حول محورها. لقد كان اختيار موقعَ إطارِ الإسنادِ القصوري الفيصل في تحديد قيمة وأهمية دوران الأرض حول محورها وحول الشمس. إذ تنطوي حركة الأرض على تعقيداتٍ كثيرةٍ عند بحثها بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري مثالي[1].

ولذا، يتكون تسارع الجسم الملامس لسطح الأرض من عدة مركبات: إحداها المركبة الناتجة من حركة المجرة التي تنتمي إليها الأرض، ومركبة أخرى من تسارع الشمس، وثالثة من دوران الأرض حول الشمس. وهذه الأخيرة هي الأكبر بين المذكورة أعلاه. إن حساب قيمة تسارع سطح الأرض يتطلب تخيلَ مركزَ شمسنا لا يتسارع، إذ نعتبره نقطة أصلٍ لإطار إسنادٍ قصوري، فيدور متجه موضع الأرض حول الشمس دورةً واحدةً كل عام، **شــكـــل 2.7**. ولذا، فسرعته الزَّاويَّة

$$\omega_{ES} = \frac{1[\text{rev.}]}{1[\text{year}]} \times \frac{2\pi}{1[\text{rev.}]} \times \frac{1[\text{rad}]}{1[\text{s}]} \times \frac{1[\text{year}]}{365[\text{day}]} \times \frac{1[\text{day}]}{24[\text{hr}]} \times \frac{1[\text{hr}]}{3600[\text{s}]}$$

$$\omega_{ES} = 1.99\times10^{-7}\ [\text{rad./s}]$$

حيث يشير الرمزان السُّفْلِيَّان ES لدوران الأرض حول الشمس. إذا افترضنا أن السرعة الزاوية لدوران الأرض حول الشمس ثابتة، فإن تسارعها أثناء حركتها في مسارٍ إهليلجيٍ حول الشمس يساوي التسارع العمودي فقط



شــكـل 2.7

$$a = \rho\,\omega_{ES}^2 = 1.49\times10^{11}\,[\text{m}] \times 1.99\times10^{-7}\,[\text{rad./s}]$$

$$a = 5.9\times10^{-3}\ [\text{m/s}^2]$$

أو كنسبة 0.06 % من تسارع الجاذبية الأرضية. لذا، من السهولة بمكان شطبُ هذا التســـارع من حســـابات أغلب المسائل الهندسية أثناء الحركة على سطح الأرض أو قريباً منها. من جهة أخرى، عند حل بعض المسائل المتعلقة بالفضاء، كدورانِ مركبة فضائية حول الشمس، أو إفلات أخرى من مجال جاذبيتها، حيث يتطلب الأمر دقةً أكبر من ذي قبل، من الضروري حساب هذه التسارعات وعدم إلغائها.

وحتى نأخذ فكرةً جليةً عن استقرار جسيم ما على سطح الأرض، مع دورانها حول نفسها وحول الشمس، من الضروري اختيار إطاري إسنادٍ أحدهما ثابتٌ ، تَتَطابَقُ نقطةُ أصله O_1 مع مركز الأرض، وآخرٌ متحركٌ، تتطابق نقطة أصله O مع موقع الجسيم على سطح الأرض، **شــكل 3.7**. حركة إطار الإسناد المتحرك دورانيةً منتظمةً (حركة الأرض حول محورها)، وذات سرعة زاوية ثابتةٍ مقدارها دورةً واحدةً يومياً.

---

[1] إطار الإسناد القصوري المثالي هو الإطارُ الذي يتطابق مركزه مع مركز الكون.

$$\omega = \omega_{EE} = \frac{2\pi \ [rad.]}{1[day]} = \frac{2\pi \ [rad.]}{86164[s]} = 7.29 \times 10^{-5} \ [rad./s]$$

حيث يشير الرمزان السفليان EE لدوران الأرض حول محورها[2]. وإذا كان الجسيم ملامساً لسطح الأرض ولا يفارقه، فإن سرجهته النسبية تساوي الصفر، $\boldsymbol{v}_r = 0$. ولذلك ، فكل من مركبتي التسارع النِّسبيَّة والكوريوليسية تساويان الصفر $\mathbf{a}_r =$ $\mathbf{a}_{cor} = 0$. والمعادلة 1.7 تكتب بالشكل التالي

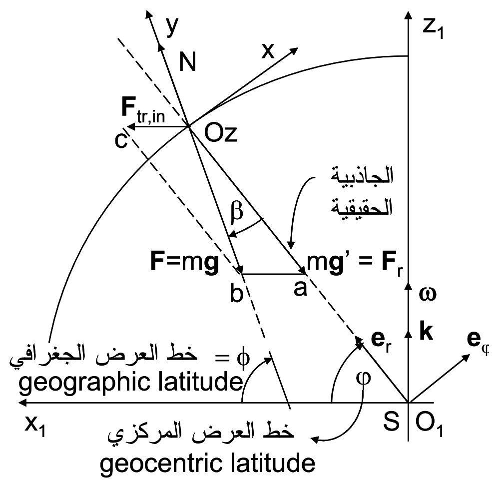
$$m\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{F} \qquad 2.7$$

التي تمثل المعادلة الاتجاهية لاستقرار الجسيم على سطح الأرض. إن استقرار الجسيم المعين يعني عملياً أنه ملازم لموقع محددٍ على سطح الأرض، لا يفارقه، ويدور مع الأرض وبها. وهذا سر بقاء المركبة المكتسبة للتسارع الناتجة من دوران الأرض حول محورها ضمن معادلة الاستقرار التي تُحسب إتجاهياً كحاصل الضرب الإتجاهي المضاعف

$$\mathbf{a}_{tr} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \qquad 3.7$$

حيث يتحدد تموضع الجسيم بالنسبة إلى مركز الأرض بالمتَّجِه $\mathbf{r}$، $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r$، وتعرف السرجهة الزاوية لدوران الأرض كمتَّجِهٍ منطبقٍ على المحور جنوب شمال NS، $\omega = \omega \boldsymbol{k}$، **شـــكل 3.7**، أو بدلالة الوَحَدَات الاتِّجَاهِيَّة القطبية $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\varphi$

$$\omega = \omega \cos\varphi \, \mathbf{e}_\varphi + \omega \sin\varphi \, \mathbf{e}_r \qquad 4.7$$



شـــكل 3.7

حيث φ الزاوية التي تحدد خط العرض المركزي Geocentric Latitude للموقع O على سطح الأرض، بينما الزاوية ϕ فتحدد خط العرض الجغرافي Geographic Latitude لنفس الموقع O. وإذا استبدلنا السرجهة الزاوية ω، في المعادلة 3.7 بقيمتها من المعادلة 4.7، فإن التسارع المكتسب يصبح

$$\mathbf{a}_{tr} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = R\,\omega^2 \{ \sin\varphi \cos\varphi \, \mathbf{e}_\varphi - \cos^2\varphi \, \mathbf{e}_r \} \qquad 5.7$$

القوى المؤثرة على الجسيم الملامس لسطح الأرض هي قوتان: قوة جذب الأرض للجسيم، اتجاهها نحو مركز الأرض

$$\mathbf{F}_r = m\,\mathbf{g}' = -\, mg'\,\mathbf{e}_r \qquad 1.6.7$$

---

[2] تدعى الفترة الزمنية اللازمة لدوران الأرض حول محورها دورةً واحدةً في أطر إسنادٍ قصورية، بالنســبة إلى المجرة التي تنتمي لها باليوم الفلكي Sidereal Day، وهي تســاوي 23 ساعة و56 دقيقة و4 ثواني؛ أي 86164 ثانية. أمَّا اليوم الشمسي Solar Day فهو أطول قليلاً، إذ يلزم أيضاً 3 دقائق و56 ثانية فقط؛ أي 24 ساعةً لنقطةٍ على الأرض لكي تعود إلى نفس الموضع نسبةً إلى الشمس.

و(قوة) رد فعل الأرض على الجسيم، اتجاهها شاقولياً للأعلى، وهي مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لقوة الوزن

$$\mathbf{N} = m\,\mathbf{g} = mg\cos\beta\,\mathbf{e}_r + mg\sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 2.6.7$$

حيث β الزاوية التي تحدد انحراف متَّجِه موضع الجسيم عن الخط الشاقولي في ذلك الموقع. المتَّجِهُ الرئيسي للقوى المؤثرة على الجسيم الملامس لسطح الأرض

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_r = -\,mg'\,\mathbf{e}_r + mg\cos\beta\,\mathbf{e}_r + mg\sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 7.7$$

وباستبدال متجه التسارع المكتسب $\mathbf{a}_{tr}$، من المعادلة 5.7، واستبدال المتجه الرئيسي للقوى $\mathbf{F}$ من المعادلة 7.7، تؤول المعادلة 2.7 إلى الشكل التالي

$$m R\omega^2\{\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi - \cos^2\varphi\,\mathbf{e}_r\} = -\,mg'\mathbf{e}_r + mg\cos\beta\,\mathbf{e}_r + mg\sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 8.7$$

والمكافئة للمعادلتين القياسيتين

$$m R\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = mg\sin\beta \qquad 1.8.7$$

$$-\,m R\omega^2\cos^2\varphi = -\,mg' + mg\cos\beta \qquad 2.8.7$$

نحسب من المعادلة الأولى الزاوية β

$$\beta = \arcsin\left\{\frac{R\omega^2\sin 2\varphi}{2\,g}\right\}$$

$$\beta_{max} = \beta\Big|_{\varphi=45^\circ} = \arcsin\left\{\frac{R\omega^2}{2\,g}\right\} = 0.1\ [\ ^\circ\ ]$$

أي أن أقصى انحرافٍ للجسم المتحرك يبلغه عندما تكون زاوية الخطِّ الجغرافي $\varphi = 45^\circ$ [3]. وباستبدال $\cos\beta_{max} = 1$ في المعادلة، وقسمة طرفي المعادلة المذكورة على الكمية القياسية m، نجد قيمة الانحراف (التفاوت) في التسارع الأرضي

$$\Delta g = g - g' = R\,\omega^2\cos^2\varphi \qquad 9.7$$

التي تعتمد على زاوية خط العرض ممثلةً في الزاوية φ. هذا الانحراف يبلغُ أقصى قيمةٍ له عندما تكون الزاوية $\varphi = 0$؛ أي عند خط الاستواء

$$\Delta g|_{max} = g - g' = R\,\omega^2$$

$$\Delta g|_{max} = 637\times10^4\ [m] \times \{7.29\times10^{-5}\ [rad./s]\}^2 = 0.0338\ [m/s^2] \qquad 1.9.7$$

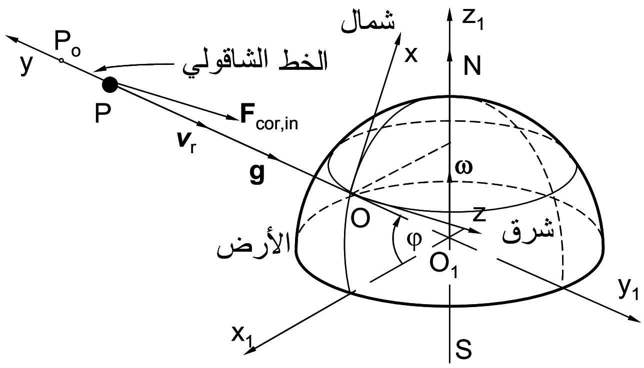
أو كنسبة 0.345% من تسارع الجاذبية الأرضية.

---

[3] من الآن فصاعداً نذكر خط العرض Latitude فقط دونما ذكرٍ لنوعه.

3.7 انحراف المقذوفات The Projectiles Displacement

القوة الوحيدة المؤثرة على المقذوفة عند حركتها بالقرب من سطح الأرض هي قوة جذب الأرض لها $\mathbf{F}_r = m\,\mathbf{g}'$. وإذا أضفنا إليها قوة القصور المكتسبة الناتجة من دوران الأرض حول محورها، فإنّ القوتين المذكورتين تُشكلان معاً قوة الوزن $m\mathbf{g}$، $m\mathbf{g} = m\mathbf{g}' + \mathbf{F}_{tr,in}$، وانظر أيضاً متوازي الأضلاع abcO، **شكل 3.7**. وباستبدال $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ وأيضاً $\mathbf{F}_{cor,in} = 2\,m\,\omega \times \boldsymbol{v}_r$ في المعادلة 1.7 (انظر المعادلة 96.2) يكون



شكل 4.7

$$m\,\mathbf{a}_r = m\,\mathbf{g} - 2\,m\,\omega \times \boldsymbol{v}_r$$

وباختصار الكتلة m من الطرفين

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\,\omega \times \boldsymbol{v}_r \qquad 10.7$$

التي تمثل المعادلة الاتجاهية التفاضلية لحركة الجسيم على سطح الأرض. وتُعرف المعادلة 10.7 في بعض المراجع والديناميكا الفضائية بالأخص بالمعادلة الباليستية Ballistic Equation. لحلها نعتمد المتجهات

$$\mathbf{a}_r = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$
$$\mathbf{g} = -g\,\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$
$$\omega = \omega\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \omega\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$$

حيث تكون المعادلات الأخيرة صحيحةً فقط للقيم $\beta_{max} \cong 0$، إذ أن $\phi = \varphi + \beta$. وبتعويض المعادلات الثلاث في المعادلة 10.7

$$\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} = -g\,\boldsymbol{j} - 2\,\omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad 11.7$$

أو ثلاث معادلات قياسية بدلالة مركبات التسارع النسبي

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\,\omega\,\dot{z}\,\sin\varphi \\ \ddot{y} &= -g + 2\,\omega\,\dot{z}\,\cos\varphi \\ \ddot{z} &= 2\,\omega\,(\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi) \end{aligned} \qquad 12.7$$

والتي يعطي تكاملها (معادلات 12.7) ثلاث معادلات قياسية لمركبات السرعة

$$\dot{x} = -2\omega z\sin\varphi + C_1$$
$$\dot{y} = -g t + 2\omega z\cos\varphi + C_2 \qquad 13.7$$
$$\dot{z} = 2\omega(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + C_3$$

المعادلات 12.7 و 13.7 الواردة أعلاه هي معادلات التسارع والسرعة العامة للمقذوفة بالقرب من سطح الأرض وتحت تأثير قوة الجاذبية فقط. إن تحديد قيمة الإزاحة (الانحراف) في حركة المقذوفة، نتيجة لدوران الأرض حول نفسها، يتطلب حل هذه المعادلات بدلالة الإحداثيات الديكارتية المتحركة x ، y و z للشروط الحدية boundary conditions التالية: إذا افترضنا أن المقذوفة انطلقت في اللحظة الابتدائية $t = t_o = 0$ من النقطة O على سطح الأرض $\mathbf{r}_o = 0$، بسرجهةٍ ابتدائية $\boldsymbol{v}_o$، **شكل 4.7**

$$t = t_o = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_o = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{v}_o = \dot{x}_o\boldsymbol{i} + \dot{y}_o\boldsymbol{j} + \dot{z}_o\boldsymbol{k} \qquad 14.7$$

فإن تعويض هذه الشروط في المعادلة 13.7 ، يبين أن الثوابت الثلاثة الأولى تتحدد كما يلي

$$C_1 = \dot{x}_o,\; C_2 = \dot{y}_o,\; C_3 = \dot{z}_o$$

وتبعاً لذلك ، تؤول معادلات السرعة 13.7 إلى الشكل الجديد

$$\dot{x} = \dot{x}_o - 2\omega z\sin\varphi$$
$$\dot{y} = \dot{y}_o - g t + 2\omega z\cos\varphi \qquad 15.7$$
$$\dot{z} = \dot{z}_o + 2\omega(x\sin\varphi - y\cos\varphi)$$

وباستبدال $\dot{x}$ و $\dot{y}$ الواردتين في المعادلة الثالثة من معادلات 12.7 بقيمهما من معادلات 15.7 نحصل على مركبة التسارع في الاتجاه $\boldsymbol{k}$

$$\ddot{z} = 2\omega\{(\dot{x}_o - 2\omega z\sin\varphi)\sin\varphi - (\dot{y}_o - g t + 2\omega z\cos\varphi)\cos\varphi\}$$
$$\ddot{z} = 2\omega\dot{x}_o\sin\varphi - 2\omega\dot{y}_o\cos\varphi - 4\omega^2 z + 2\omega g t\cos\varphi \qquad 16.7$$

وفي حالات كثيرة يعتبر المقدار ω^2 صغيرٌ جداً بالنسبة إلى مركبات السرعة الابتدائية $\dot{x}_o$ ، $\dot{y}_o$ و $\dot{z}_o$ ، إذ يمكن إلغائه بسهولة. وبإجراء التكامل المتتالي مرتين نحصل على مركبتي السرجهة والإحداثيّ z

$$\dot{z} = 2\omega\dot{x}_o t\sin\varphi - 2\omega\dot{y}_o t\cos\varphi + \omega g t^2\cos\varphi + C_4 \qquad 17.7$$
$$z = \omega\dot{x}_o t^2\sin\varphi - \omega\dot{y}_o t^2\cos\varphi + \omega g\frac{t^3}{3}\cos\varphi + C_4 t + C_5 \qquad 18.7$$

كما أن تعويض الشروط الحدية 14.7، في المعادلتين الأخيرتين ينتج أن

$$C_4 = \dot{z}_o \;,\; C_5 = 0$$

والمعادلة الأخيرة 18.7 تصبح

$$z = \omega g\frac{t^3}{3}\cos\varphi + \omega t^2\{\dot{x}_o\sin\varphi - \dot{y}_o\cos\varphi\} + \dot{z}_o t \qquad 19.7$$

التي تبين مقدار الانحراف الشـــرقي للمقذوفة عند حركتها بالقرب من سطح الأرض. ولإيجاد مقدار الانحراف في الاتجاهين الآخرين x و y نستبدل z الواردة في المعادلات 15.7 بقيمتها من المعادلة 19.7، فنكتب

$$\dot{x} = \dot{x}_o - 2\omega \dot{z}_o t \sin\varphi \qquad 20.7$$

$$\dot{y} = \dot{y}_o - gt + 2\omega \dot{z}_o t \cos\varphi \qquad 21.7$$

تكامل المعادلتين 20.7 و 21.7 يعطي الإزاحتين، الشمالية الموازية لخط الزوال

$$x = \dot{x}_o t - \omega \dot{z}_o t^2 \sin\varphi + C_6 \qquad 22.7$$

والعمودية

$$y = \dot{y}_o t - g\frac{t^2}{2} + \omega \dot{z}_o t^2 \cos\varphi + C_7 \qquad 23.7$$

وبأخذ الشروط الحدية مرةً أخرى بالحسبان للمعادلتين 22.7 و 23.7 نجد أن $C_6 = C_7 = 0$، ولينتج أخيراً أن مقدار الإزاحتين ، الموازية لخط الزوال والعمودية

$$x = \dot{x}_o t - \omega \dot{z}_o t^2 \sin\varphi \qquad 24.7$$

$$y = \dot{y}_o t - g\frac{t^2}{2} + \omega \dot{z}_o t^2 \cos\varphi \qquad 25.7$$

هذه المعادلات 24.7، 25.7 و 19.7 تدعى بمعادلات الحركة العامة The General Equations of Motion للمقذوفة بالقرب من سطح الأرض تحت تأثير قوة الجاذبية فقط. إن مقارنة أولية بين المعادلات المذكورة أعلاه وبين معادلات حركة المقذوفة المنطلقة من مركز إطار إسناد قصوري وتحت نفس الشروط الابتدائية، لتبين أن هناك انحرافاً ما في الإحداثيات يعتمد على سرعة دوران الأرض وزاوية خط العرض. وتبلغ قيمته للإحداثيات الثلاثة

$$\Delta x = -\omega \dot{z}_o t^2 \sin\varphi \qquad 26.7$$

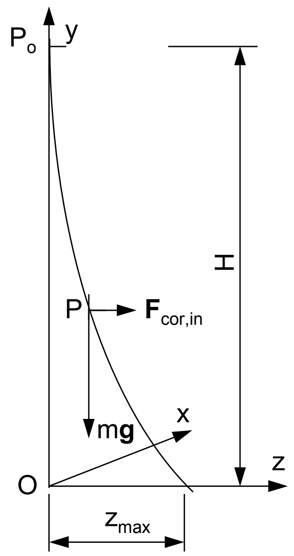
$$\Delta y = \omega \dot{z}_o t^2 \cos\varphi \qquad 27.7$$

$$\Delta z = \omega g \frac{t^3}{3} \cos\varphi + \omega t^2 \{\dot{x}_o \sin\varphi - \dot{y}_o \cos\varphi\} \qquad 28.7$$

بهذه النتائج، المعادلات 19.7 و 24.7 - 28.7 وحيثما يكن زمن الحركة كبيراً، كانسياب الأنهار وحركة الرياح، تفسر ظواهر تآكل الشواطئ اليمنى للأنهار الجارية في النصف الشمالي للأرض، وانحراف التيارات البحرية والرياح ذات الاتجاه الثابت. أما الصواريخ البعيدة المدى - العابرة للقارات فسينحرف مسارها بوضوح إذا لم يؤخذ دوران الأرض بالحسبان.

4.7 انحراف الجسيم الساقط رأسياً نتيجة دوران الأرض حول محورها

نفترض أن جسيماً، كتلته m، سقط بدون سرعة ابتدائية من ارتفاعٍ H فوق سطح الأرض. نثبت إطار الإسـناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$ في مركز الأرض، والإطار المتحرك Oxyz في النقطة الواقعة على سطح الأرض، والناتجة من إسقاط خط شاقولي Plumb Line من الموقع الابتدائي للجسيم الساقط P_o، **شـكل 4.7**. نرسم المحور Ox منطبقاً على مماس منحنى خط الزوال Meridian Line، وباتجاه الشمال، ونرسم المحور Oy شاقولياً من O للأعلى، أما المحور Oz فهو عموديٌّ على المحورين السابقين وباتجاه الشرق، **شـكل 5.7**.



شـكل 5.7

تتحدد حركة الجسيم السـاقط نحو الأرض بالمعادلة الأساسية لحركته النسبيـة، معادلـة 1.7. سـنعتبر وزن هذا الجسيم ثابتاً، وكذلك تسـارع الجاذبيـة الأرضية، ونهمل تأثير مقاومة الهواء للجسيم أثناء الحركة. إن حلّ المعادلة 1.7 التدريجي، يتطلب إلغاء تأثير قوة كوريوليس القصورية وقوة التسارع المكتسب، أي أن $\mathbf{F}_{tr,\,in} = \mathbf{F}_{cor,\,in} = 0$. مما يسهل حل المعادلة الناتجة

$$\mathbf{a}_r = -g\,\boldsymbol{j} \qquad 29.7$$

أو ثلاث معادلاتٍ قياسية

$$\ddot{x} = 0,\ \ \ddot{y} = -g,\ \ \ddot{z} = 0 \qquad 1.29.7$$

وذلك للشروط الحدية الجديدة

$$t = t_0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_o = 0\ ,\ \mathbf{r} = \ \ = H\,\boldsymbol{j} \qquad 30.7$$

تكامل المعادلات 1.29.7 مرتين يبين أن مركبات الإزاحة

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= H - g\frac{t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad 31.7$$

إذا عوضنا الحل التقريبي الأول 31.7 ومشتقاته في المعادلات 12.7 نحصل على معادلات ذات تقريب ثاني

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \\ \ddot{z} &= 2\omega g t\cos\varphi \end{aligned} \qquad 32.7$$

تتحدد قيمة الانحراف الشرقي للجسيم الساقط من الارتفاع H بإجراء التكامل مرتين على المعادلة الأخيرة من معادلات 32.7، لنجد أن

$$\dot{z} = \omega g\cos\varphi\, t^2 + C_8$$

$$z = \omega g\frac{t^3}{3}\cos\varphi + C_8 t + C_9$$

وبتعويض الشروط الحدية 30.7، يتلاشى الثابتان

$$C_8 = C_9 = 0$$

والانحراف الشرقي يبلغ

$$z = \omega g \frac{t^3}{3} \cos\varphi \qquad 33.7$$

من جهة أخرى، يتحدد الانحراف الشرقي كدالة فرق ارتفاع H - y. فنستبدل t الواردة بقيمتها من المعادلة الثانية من معادلات 31.7

$$t = \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \qquad 34.7$$

فنحصل على المعادلة

$$z = \frac{\omega g}{3}\left\{\frac{2\,(H-y)}{g}\right\}^{\frac{3}{2}} \cos\varphi \qquad 35.7$$

هذه المعادلة مطابقة لمعادلة القطع المخروطي (المكافئ) نصف التكعيبي Semicubical Parabola، وهي تحدد مقدار الانحراف الشرقي للجسيم أثناء سقوطه الحر بدلالة الارتفاع الذي فقده، وزاوية خط العرض بالإضافة إلى سرعة دوران الأرض. وتبعاً لذلك، يتحدد أقصى انحرافٍ يبلغه الجسيم من سقوطه على الأرض لحظة ارتطامهِ بسطحها، وعندئذ تكون y = 0

$$z_{max} = \frac{2H\omega}{3} \cos\varphi \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad 36.7$$

نلاحظ أن مقدار انحراف الجسيم الساقط الأقصى نحو الشرق صغيرٌ جداً لتناسبه الطردي مع السرعة الزاوية لدوران الأرض. فعلى سبيل المثال، إذا سقط جسيم من ارتفاع H = 100 متر من فوق مدينة القدس، زاوية خط العرض φ = 31° 45' وتسارع الجاذبية g = 9.8 متر/ثانية^2، فإن أقصى انحرافٍ للشرق يبلغه هذا الجسيم، وحسب المعادلة 36.7 سيكون 1.87 سنتيمتراً.

أسـئـلـة مـحـلـولـة

سـؤال م 1.7

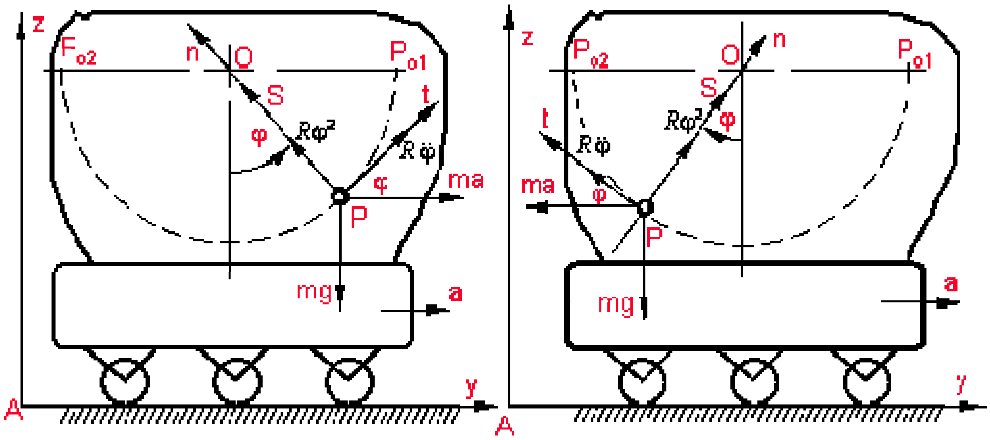
يتأرجح بندولٌ بسيط، كتلته m، وطول خيطه R، حول محورٍ أفقي Ox ومثبتٌ على عربةٍ تسير أفقياً بتسارعٍ ثابتٍ، مقداره a. أوجد شد الخيط بدلالة الزاوية φ إذا تحرك الثقل بدون سرعةٍ نسبية ابتدائية من الموقع الابتدائي:

أ - P_{o1} ، $\varphi_o = -\pi/2$ ب - P_{o2} ، $\varphi_o = \pi/2$.

الـحـل

نحدد المحاور الديكارتية الثابتة Axyz والمتحركة Pnt. ولأن الحركة تتم في المستوى العمودي Oyz يكون مُتَّجِهُ التسارع المطلق للثقل P منطبقاً على المستوى Oyz

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a} + \mathbf{a}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_P = \mathbf{a} + R\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_t + R\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_n \qquad 1$$



شـــكل م 1.7

بحيث تتمثل جميع مركبات المتجه a_P كأشعة تنطلق من النقطة P. وتبعاً لذلك، تتحدّد حركة البندول P من قانون نيوتن الثاني للإحداثيات الطبيعية Pnt (أضيفت قوة القصور المكتسبة ma كقوة مؤثرة)

$$t: \ ma\cos\varphi - mg\sin\varphi = mR\ddot\varphi \qquad 2$$

$$n: \ S - mg\cos\varphi - ma\sin\varphi = R\dot\varphi^2 \qquad 3$$

وباختصار الكتلة m من طرفي المعادلة 2 واستبدال $\ddot\varphi = \dot\varphi\frac{d\dot\varphi}{d\varphi}$ ثمّ ترتيب المعادلة وإجراء التكامل يكون

$$R\int_0^{\dot\varphi}\dot\varphi d\dot\varphi = \int_{\varphi_o}^{\varphi}(a\cos\varphi - g\sin\varphi)d\varphi$$

أو

$$R\dot\varphi^2 = 2[g\cos\varphi + a\sin\varphi]_{\varphi_o}^{\varphi} \qquad 4$$

1- عندما تكون $\varphi_o = -\pi/2$ فإن

$$R\dot\varphi^2 = 2[g\cos\varphi + a(\sin\varphi + 1)] \qquad 5$$

والشد في الخيط

$$S = m[3g\cos\varphi + a(3\sin\varphi + 2)] \qquad 6$$

2 - وعندما تكون $\varphi_o = \pi/2$ فإن

$$R\dot\varphi^2 = 2[g\cos\varphi + a(\sin\varphi - 1)] \qquad 7$$

والشد في الخيط

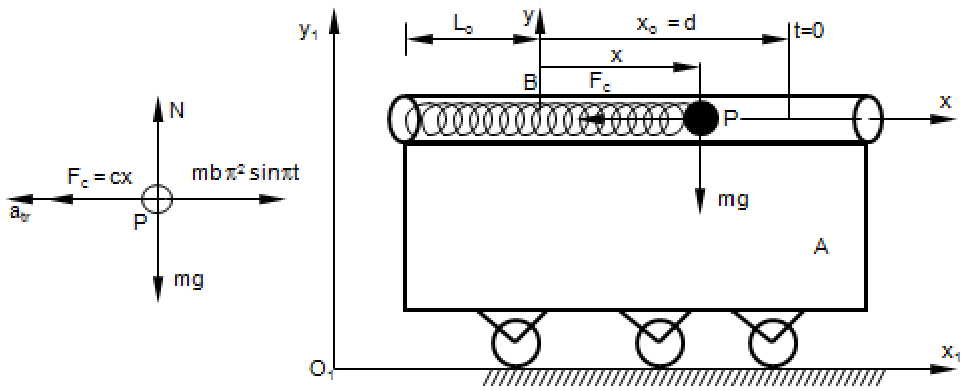
$$S = m[3g\cos\varphi + a(3\sin\varphi - 2)] \qquad 8$$

سـؤال م 2.7

تتحرك عربةٌ A على مستوىً أفقي وفقاً للعلاقة

$x_1 = b \sin \pi t$ 1

وتحمل العربة على سطحها أنبوبةٌ أفقيةٌ ملساء بداخلها زنبركٌ، معامل مرونته c وطوله غير المشدود L_o. كما يرتبط بالزنبرك بِلْيَةٌ كرويةٌ، كتلتها m. أوجد معادلة الحركة النسبية للبِلْيَة وضغط الأنبوبة عليها إذا تحركت من السكون عندما كانت على بعد $x_o=d$.



شـكل م 2.7

الـحـــل

نحدد حركة العربة على المستوى الأفقي كمحور Ox_1 الثابت، ونحدد مسار البِلْيَةِ الصغيرة داخل المجرى الأفقي كمحور Bx المتحرك، حيث B نقطةٌ تتواجد على بعد L_o من حافة العربة عندما يكون الزنبرك مرخياً. يتحدد تسارع العربة من المشتقة الثانية لمعادلة حركتها

$\dot{x}_1 = b\pi\cos\pi t \,,\; a_{tr} = \ddot{x}_1 = -b\pi^2 \sin\pi t$ 2

المعادلة الرئيسية للحركة النسبية عند انعدام الجزء الكوريوليسي $\mathbf{a}_{cor} = 0$ (لعدم دوران المحاور المتحركة حول المحاور الثابتة، $(\omega=0$)، انظر معادلة 3.1.7

$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_{tr\,in} + \mathbf{F}$ 3

من علاقة التسارع 2 نحسب مقدار قوة القصور المكتسبة

$\mathbf{F}_{tr\,in} = -\,m\,\mathbf{a}_{tr} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{tr,in} = m b\, \pi^2 \sin \pi\, t\, \boldsymbol{i}$ 4

كما نحسب متجه القوة المؤثرة

$\mathbf{F} = -\,mg\,\boldsymbol{j} + N\,\boldsymbol{j} - cx\,\boldsymbol{i}$ 5

ونعوض العلاقات 4 و 5 في المعادلة 3 نجد أن

$m(\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}) = -mg\boldsymbol{j} + N\boldsymbol{j} - cx\boldsymbol{i} + mb\pi^2 \sin\pi t\,\boldsymbol{i}$ 6

لنجد منها ردُّ فعل الأنبوبة على البِلْيَة

$\mathbf{N} = mg\,\boldsymbol{j}$ 7

من جهة أخرى، نحسب مركبة x بعد القسمة على m

$\ddot{x} + \dfrac{c}{m}x = b\pi^2 \sin\pi t$ 8

والتي تمثل المعادلة التفاضلية لحركة البلية داخل الأنبوبة. وهي معادلة من الرتبة الثانية وذات معاملاتٍ ثابتةٍ وغير متجانسة. ويتم حل هذه المعادلة بإيجاد الحلين: العام x_h والخاص x_p

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad \& \quad x_p = C_3 \sin \pi t \qquad 9$$

حيث أن $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$. ولإيجاد ثوابت الحل نبدأ من الحل الخاص

$$x_p = C_3 \sin \pi t$$

$$\dot{x}_P = C_3 \pi \cos \pi t , \quad \ddot{x}_P = -C_3 \pi^2 \sin \pi t \qquad 10$$

وبتعويض المعادلات 9 و 10 في المعادلة الرئيسية 8 يكون

$$- C_3 \pi^2 \sin \pi t + \frac{c}{m} C_3 \sin \pi t = b \pi^2 \sin \pi t$$

$$C_3 = \frac{b \pi^2}{\frac{c}{m} - \pi^2} = \frac{b \pi^2}{\omega^2 - \pi^2} \qquad 11$$

الحــــل الكلي

$$x = x_h + x_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 \sin \pi t \qquad 12$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + C_3 \pi \cos \pi t \qquad 13$$

فالثابت C_1 يتحدد من الشرط $x_o=d$ والمعادلة 12

$$d = C_1 \cos 0^o + C_2 \sin 0^o + C_3 \sin 0^o$$

$$\therefore \quad C_1 = d \qquad 14$$

كما أن تعويض الشرط الابتدائي $\dot{x}_o = 0$ في المعادلة 13 يعطي

$$C_2 \omega + C_3 \pi = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{b \pi^3}{(\omega^2 - \pi^2) \omega} \qquad 15$$

وبتعويض قيم الثوابت C_1، C_2 و C_3 من العلاقات 11 ، 14 و15، نحصل على معادلة حركة البلِية النسبية

$$x = d \cos \omega t - \frac{b \pi^3}{(\omega^2 - \pi^2) \omega} \sin \omega t + \frac{b \pi^2}{\omega^2 - \pi^2} \sin \pi t \qquad 16$$

ســؤال م 3.7

يدور سلكٌ منحنٍ على شكل دائرة، نصف قطره R في مستوىً أفقي بسرعةٍ ثابتة مقدارها ω ، حول محورٍ عمودي يمر في النقطة O. أوجد سرعة الحلقة النسبية ورد فعل السلك على الحلقة (ضغط الحلقة على السلك)كدالتي زاوية قطبيه φ. كتلة الحلقة m، وفي اللحظة الابتدائية $t_o=0$ انطلقت الحلقة من الموقع P_o بدون سرعةٍ ابتدائية.

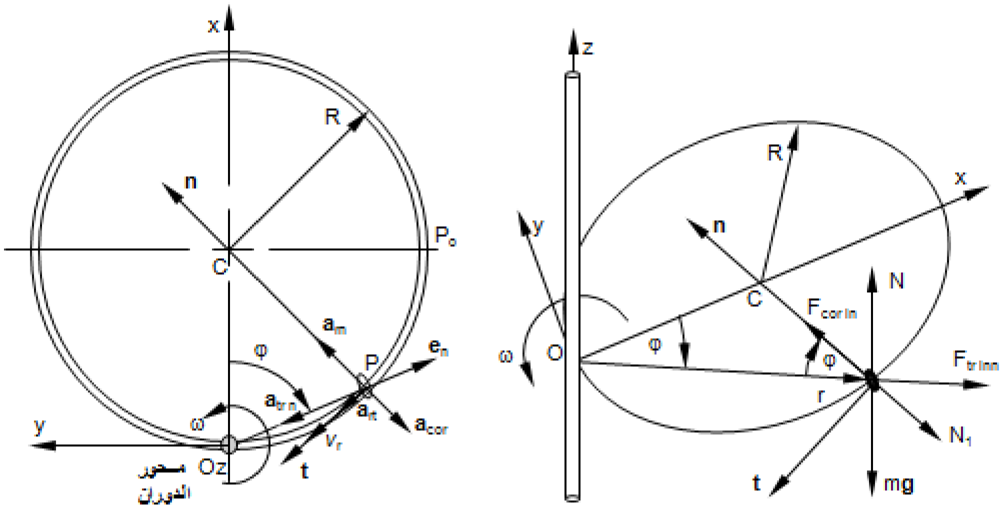
الـــحــــل

نحدد المحاور الثابتة Oxyz والمتحركة Pnt، حيث تتم الحركة في المستوى الأفقي Oxy. يتحدد مقدار السرعة النسبية للحلقة من قانون تغير الطاقة الحركية للجسيم، معادلة 24.5 ، وذلك لاتجاه الحركة النسبية

$$m \frac{v_r^2}{2} - m \frac{v_{ro}^2}{2} = A \qquad 1$$

نحلل مركبات المعادلة 1 جزءً جزءً. سرعة الحلقة النسبية الابتدائية تساوي صفراً

$$v_{ro} = 0 \qquad 2$$



شـــكل م 3.7

بينما يتكون الشغل A من شغل القوى المؤثرة وشغل القوى القصورية

$$A = A_F + A_{fin} \qquad 3$$

شغل القوة المؤثرة F

$$A_F = 0 \qquad 4$$

لأن جميع القوى المؤثرة عمودية علـــى الحركـــة النســـبية ، **F** = N***j*** - mg***j***. نحســـب الشـــغل المبـــذول مـــن قـــوى القصـــور كمحصلة شغلي مركبتي قوتي القصور الكوريوليسية والمكتسبة فقط

$$A_{Fin} = A_{Ftr\,in} + A_{Fcor\,in} \qquad 5$$

حيث يساوي شغل قوة القصور الكوروليسية الصفر

$$A_{Fcor\,in} = 0 \qquad 6$$

لتعامد قوة القصور الكوروليسية مع الإزاحة النسبية. شغل قوة القصور المكتسبة بدلالة جزأيها العمودي والمماسي

$$A_{Ftr\,in} = A_{Ftr\,in\,n} + A_{Ftr\,in\,t} = A_{Ftr\,in\,n} \qquad 7$$

لأن دوران السلك حول المحور ثابتٌ، ω=const. قوة القصور المكتسبة العمودية

$$F_{tr\,in\,n} = m\,r\,\omega^2 \qquad 8$$

وتبعاً لذلك يتحدد مقدار شغلها من التكامل التالي

$$A_{Ftr\,in\,n} = \int_{r_o}^{r} F_{tr\,in\,n}\,dr = m\,\omega^2 \int_{\sqrt{2}R}^{r} r\,dr$$

$$A_{Ftr\,in\,n} = m\,\omega^2\,(r^2 - 2R^2)/2$$

وحيث أن $r = 2R\cos\varphi$ فإن

$$A_{Ftr\,in\,n} = m\,\omega^2 R^2\,(2\cos^2\varphi - 1)$$

أو

$$A_{Ftr\,in\,n} = m\,\omega^2 R^2 \cos 2\varphi \qquad 9$$

وباستبدال كل من الأجزاء 4 ، 6 و 9 في المعادلة 3 ينتج أن شغل محصلة القوى

$$A = A_{Ftr\,in\,n} = m\,\omega^2 R^2 \cos 2\varphi \qquad 10$$

كما أن استبدال الشغل A من المعادلة 10 والسرعة النسبية الابتدائية v_{ro} من المعادلة 2 وتعويضهما في المعادلة الأساسية 1 تمكننا من إيجاد قيمة السرعة النسبية

$$m\frac{v_r^2}{2} = m\,\omega^2 R^2 \cos 2\varphi \Rightarrow v_r^2 = 2\,\omega^2 R^2 \cos 2\varphi \qquad 11$$

$$v_r = \omega R\sqrt{2\cos 2\varphi} \qquad 12$$

ضغط الحلقة على السلك

نسقط المعادلة 1.7 على المحور العمودي Pn فنحصل على

$$ma_{rn} = - N_1 - F_{tr\,inn} \cos\varphi + F_{cor\,in} \qquad 13$$

التسارع النسبي العمودي

$$a_{rn} = \frac{v_r^2}{r} = \frac{2\omega^2 R^2 \cos 2\varphi}{2R\cos\varphi}$$

$$a_{rn} = R\omega^2 \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} \qquad 14$$

وقوة القصور الكوريوليسية

$$F_{cor\,in} = 2\,m\,\omega\,v_r$$

$$F_{cor\,in} = 2\,m\,\omega^2 R\sqrt{2\cos 2\varphi} \qquad 15$$

وباستبدال التسارع النسبي العمودي من المعادلة 13 وقوة القصور الكوريوليسية من المعادلة 15 مضافاً إليهما مركبة قوة القصور المكتسبة على محور N_1 يكون

$$m\,R\omega^2 \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = - N_1 - 2\,m\,R\,\omega^2 \cos^2\varphi + 2\,m\,\omega^2 R\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

حيث يعطي حل هذه المعادلة رد الفعل (ضغط الحلقة على السلك) في المستوى الأفقي

$$N_1 = 2\,m\,\omega^2 R\left[\sqrt{2\cos 2\varphi} - \cos^2\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\right] \qquad 16$$

وأخيراً، نحسب مركبة رد الفعل العمودي N من اسقاط معادلة الحركة ، قانون نيوتن الثاني على المحور العمودي Oz فيكون

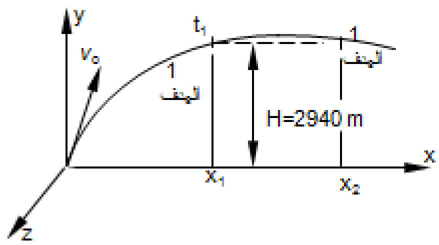
$$N = mg \qquad 17$$

سؤال م 4.7

تطلق مدفعيةٌ قذائفها نحو هدفٍ، ارتفاعه 2940 متراً فوق مستوى المدفعية وعلى امتداد خط الزوال. إذا حدد الهدف بدائرةٍ، إحداثيات مركزها (0 , 2940 , -) ونصف قطرها 5 أمتار، ولزاوية خط العرض $\varphi = 32^o$، فهل تصيب القذيفة الهدف إذا كانت سرجهتها محددة بالمتّجه

$$\boldsymbol{v}_o = 640\,\boldsymbol{i} + 245\,\boldsymbol{j} - 0.6\,\boldsymbol{k} \quad [\text{ m/s}]$$

وما إحداثيات الهدف بالضبط؟



شكل م 4.7

الحل

سيتم حل هذا السؤال بفرضية أن القذيفة تصيب الهدف. لحظتها نحسب الزمن اللآزم t حتى تصل القذيفة هدفها. فمن المعادلة 25.7 وبعد إلغاء جزئها الأخير يكون

$$y = \dot{y}_o\, t - g\frac{t^2}{2}$$

$$2940 = 245\,t - 4.9\,t^2$$

$$t^2 - 50\,t + 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t - 30)(t - 20) = 0$$

$$t_1 = 30\ [s]\ , t_2 = 20\ [s] \qquad 1$$

لنأخذ الزمن $t_1 = 30$ [s] الذي تستغرقه القذيفة للوصول للهدف 1. ولتحديد المسافة المقطوعة على محور x نستخدم المعادلة 24.7 وذلك بعد إلغاء الجزء الثاني

$$x_1 = \dot{x}_o\, t_1 = 640 \times 30 \ \ , x_1 = 19.2\ [\text{ km}] \qquad 2$$

مقدار انحراف القذيفة عن المستوى الرأسي، معادلة 19.7

$$z_1 = \frac{\omega g}{3} t_1^3 \cos\varphi + \omega t_1^2 (\dot{x}_o \sin\varphi - \dot{y}_o \cos\varphi) + \dot{z}_o t_1$$

$$z_1 = (7.29 \times 10^{-5} \times 9.8 \times 30^3 \times \cos 32)/3 \ +$$

$$= 7.29 \times 10^{-5} \times 30^2 (640 \sin 32^o - 245 \cos 32^o) - 0.6 \times 30$$

$$z_1 = -3.93\ [m] \qquad \Rightarrow |z_1| = 3.93 < 5\ [m] \qquad 3$$

أي أن قذيفة المدفعية ستصيب الهدف 1 الذي إحداثياته بالأمتار (19200,2940,-3.93) بجدارة. وعلى نفس المنوال، نتأكد من أن قذيفة المدفعية نفسها لا تصيب الهدف 2 الذي إحداثياته (- ,12800, 2940)، فنكتب قياساً على المعادلة 2 الوارد أعلاه ونحدد المسافة المقطوعة على محور x

$$x_2 = \dot{x}_o t_2 = 640 \times 20\ , \ \rightarrow \ x_2 = 12.8\ [\text{ km}] \qquad 4$$

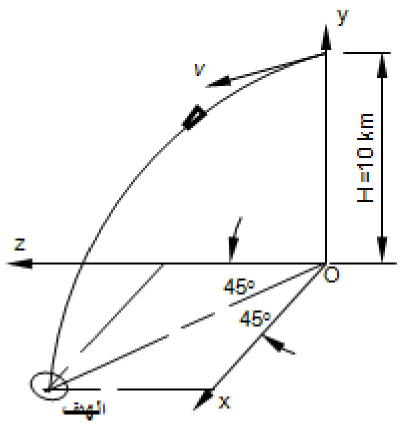
أما مقدار انحراف القذيفة عن المستوى الرأسي لحظتئذٍ

$$z_2 = -6.55\ [m] \Rightarrow |z_2| = 6.55 > 5\ [m] \qquad 5$$

أي أن القذيفة لا تصيب الهدف المحدد بالدائرة التي مركزها بالأمتار (12800,2940,-6.55).

سـؤال م 5.7

تتحرك طائرةٌ على ارتفاع 10 كيلومتر فوق سطح الأرض وبسرعة 1.5 ماخ أفقياً جنوب غرب. أين تصيب قذيفتها المنطقة بسرجهة نسبيا للأمام $v_r = 600$ [m/s]. اعتبر $\varphi = 40^o$.



شـكل م 5.7

الـحـل

سرجهة القذيفة المطلقة تساوي سرجهة القذيفة النسبية v_r مضافاً إليها سرجهة الطائرة v_j ، حيث أن $v_{br} = v_r = 600$ [m/s] ، بينما سرجهة الطائرة v_j

$$v_a = v_{br} + v_j = 600 + 1.5 \times 340$$

$$v_a = = 1110 \text{ [m/s]} \qquad 1$$

أي أن

$$v_a = \dot{x}_o \boldsymbol{i} + \dot{z}_o \boldsymbol{k}$$

$$\dot{x}_o = \dot{z}_o = 1110\cos 45^o$$

$$= 784.85 \text{ [m/s]} \qquad 2$$

نحدد الزمن t من المعادلة 25.7

$$y = \dot{y}_o t + g\frac{t^2}{2} + \omega \dot{z}_o t^2 \cos\varphi$$

وللشروط الابتدائية $\dot{y}_o = 0$ ، نجد بعد إلغاء الحد الأخير أن

$$t = \sqrt{2\frac{y}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{2\frac{10 \times 1000}{9.8}} = 45.18 \text{ [s]} \qquad 3$$

نعوض مركبتي السرجهة، معادلة 2 والزمن، معادلة 3 في المعادلات 24.7 و 19.7 لنجد أن الإحداثيين x و z للهدف المصاب

$$x = 784.85 \times 45.18 - 7.29 \times 10^{-5} \times 784.85 \times 45.18^2 \sin 40$$

$$x = 35.384 \text{ [km]} \qquad 4$$

بينما

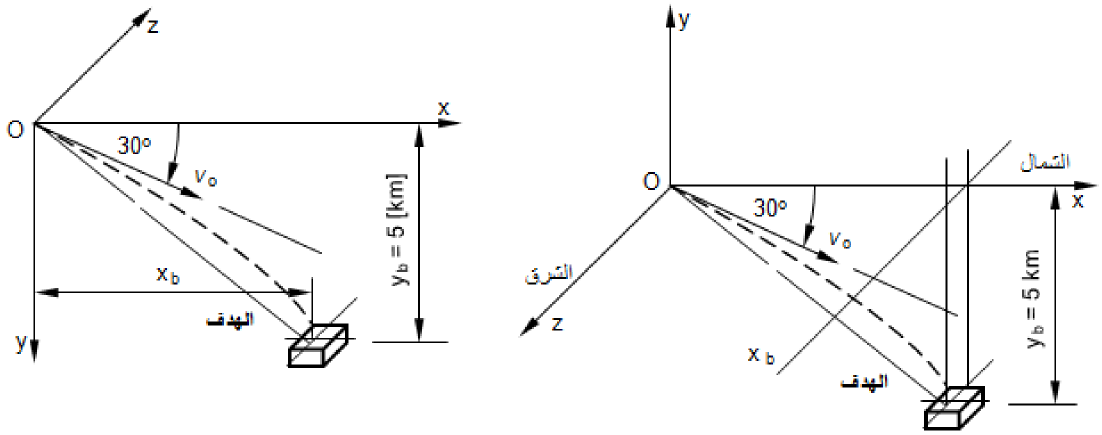
$$z = 7.29\times10^{-5}\times\{(9.8\times45.18^3 \times\cos40)/3 + 45.18^2(784.85 \sin40^o - 0)\} + 784.85 \times 45.18$$

$$z = 35.551 \text{ [km]} \qquad 5$$

أي أن إحداثيات الهدف بالأمتار (35384,0,35551).

سـؤال م 6.7

تندفع طائرةٌ قاذفةٌ نحو هدفٍ لتدمره بإطلاقها قذيفةً صاروخيةً بسرعةٍ ابتدائية قدرها 1.8 ماخ وبزاوية ميلٍ عن الأفقي $\alpha = 30^o$ وذلك من الارتفاع 5 كيلومتر فوق مستوى الهدف. إذا حُدِّد الهدف بدائرةٍ قطرها 5 أمتار، فهل يؤثر دوران الأرض على إصابة الهدف من هذا الارتفاع ؟ زاوية خط العرض $\varphi = 32^o$.



شـكل م 5.7

الـحـل

مركبات السرجهة v_o

$v_o = 1.8 \times 340 = 612$ [m/s]

$$\dot{x}_o = v_o \cos 30^o = 612 \cos 30^o = 530 \text{ [m/s]} \ \& \ \dot{y}_o = v_o \, 30^o = 612 \sin 30^o = 306 \text{ [m/s]}$$

$$\dot{z}_o = 0$$

وحتى نحسب المدى الأفقي x_b الذي تقطعه القذيفة، نُعَوِّض بدل الارتفاع y_b الذي فقدته حتى تصيب الهدف في المعادلة 25.7. ولذلك، نحسب الزمن الذي استغرقته القذيفة منذ لحظة إطلاقها حتى إصابتها الهدف

$$y_b = \dot{y}_o t + g\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 5000 = 306\, t + 4.9\, t^2$$

$$t^2 + 62.45\, t - 1020.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = 13.44 \, , \, -75.89 \text{ [s]}$$

فنلغي الجواب السالب لعدم وجود أي معنىً رياضي له

$$t_1 = 13.44 \text{ [s]} \qquad 1$$

وتبعاً لذلك، نحسب أقصى مدىً أفقيّ للقذيفة

$$x_b = 530 \times 13.44 = 7125 \text{ [m]} \qquad 2$$

ولحساب الانحراف عن المستوى العمودي نتيجة دوران الأرض نعوض بدل مجاهيل المعادلة 19.7

$$\Delta z = 7.29\times10^{-5}\times9.8\times13.44^3 \times \cos 32 / 3 \ +$$

$$+ \ 7.29\times10^{-5}\times13.44^2 \ (530 \sin 32^o \ -306 \cos 32^o)$$

$$\Delta z = 0.77 \text{ [m]} \qquad 3$$

أي أن القذيفة تصيب الهدف.