الباب الخامس

القوانين العامة لديناميكا الجسيم

1.5 المفاهيم الأساسية

بني البابان الثالث والرابع حول أربعة مفاهيمٍ رئيسيةٍ في الميكانيكا هي القوة والكتلة والطول والزمن. وهي مفاهيمٌ تُشكِّل أساساً لقانون نيوتن الثاني. ولذا؛ فعند حل أي مسألـــةٍ ديناميكية، استخدم القانون المذكور بما يرافق ذلــك، إيجـــاد ثوابت التكامل من الشـــروط الابتدائية للحركة، والتي لا حاجة لمعرفتها دائماً. ولهذا يلزم استنباط قوانين ونظرياتٍ، مشتقةٍ من قانون نيوتن الثاني، تربط بين مفاهيمٍ ديناميكيةٍ جديدة، مســتنبطةٍ من المفاهيم الميكانيكية الواردة أعلاه. أن إدارك هذه المفاهيم الجديدة يشمل أكثر من مجرد معرفة تعريفها أو كتابة معادلتها، بل يشمل تعريفها العملياتي، وبعــدُها الفيزيـــائي ووحْدَتَها، وكذلك علاقتُها بالمفاهيم الأخرى من خلال القوانين والمعادلات التي تربطها. أضف إلى ذلك ضرورة اكتســـاب شيء من الإحســـاس الحدســـي، كنوعٍ من الإدراك الفوري للمفهوم، بَعْدَ النظر إليه من زواياً مختلفة، وبعد رؤيته مطبقـــاً في مواقف متنوعةٍ كافيةٍ لجعله مألوفاً. إنّ الربط الأمثل بين هذه المفاهيم الديناميكية الجديدة، الأساسية لحركة الجسيم، في قوانين ونظريات جديدة، تكفل دراسة بعض الجوانب العملية الهامة للظاهرة المعطاة على حِدَه، بدون اللجوء إلى دارســـة الظاهرة ككل. ولمعرفة هذه القوانين والنظريات العامة، من الضروري التعرف على هذه المفــاهيم الديناميكيـــة الجديـــدة لحركة الجسيم، وهي: **الزَّخَم** momentum، **الطَّاقَة** energy و**الزَّخَمُ الزَّاوِيّ** angular momentum. لقد أثبتت كلُّ هذه المفاهيم فائدتها في حلِّ مُعْضِلات الحركة، واكتسب كلٌ منها أهميةً خاصة في الميكانيكا، بسبب ظهوره في قانونٍ للحفـــظ. كما قاوم كلٌ منها ثورتي القرن العشريـــن، النظرية النسبية وميكانيكا الكم.

الزَخَمْ[1]: يُعرّف الزخم بأنه **خاصية بحتة للحركة، يأخذ بالاعتبار تأثير حاصل ضرب سرجهة الجسيم اللحظية وكتلته**. أي أنه، إن لم تُوجد أية حركـــة، لن يكون ثمَّةَ أيَّ زَخَم. ورياضياً

$$\mathbf{K} = m\,\boldsymbol{v} \qquad 1.5$$

والرمز المألوف للزخم هو **K**، m كتلة الجسيم، و $\boldsymbol{v}$ سرجهته. وهو كميةٌ متَّجِهَةٌ يكون اتِّجاهُها بنفس اتجاه السرجهة، وبعدُه الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا الكتلة والسرعة؛ كما أن وَحْدَتَه في **النظام الدولي** *SI* هي الكيلوغرام متر لكل ثانية [kgm/s].

الدَّفْع impulse: **أحد خصائص تأثير القوة على الجسيم خلال فـــترةٍ زمنيةٍ معينة**. فإذا أثرّت على جسيم ما القوة **F**، خلال الفترة الزمنية المحددة Δt، فإن دفع هذه القوة يُعرف بالائتلاف **F**Δt، **P** = **F**Δt، حيث يرمز للدفع بالرمز **P**. وبالتالي فبعده الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا القوة والزمن؛ أو بمفاهيم ديناميكيةٍ أساسيةٍ الكتلة×الطول/ الزمن. وإذا ما كانت هذه الفترة متناهية الصغر فإن دفع القوة على هذا الجسيم يعرف رياضياً بـــالتكـــامل المحدود

$$\mathbf{P} = \int_0^t \mathbf{F}dt \qquad 2.5$$

يجب أن لا يغيب عن البال، أن القوة **F** في هذه المعادلة التكاملية دالةٌ زمنية **F** = **F**(t). وإذا ما كانت القوة ثابتة المقدار والاتجاه، ولا تعتمد على الزمن **F** ≠ **F**(t)، فإن دفعها الكلي يكون

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\ t$$

وإذا كانت القوة دالة موضع **F**=**F**(**r**)، فإن معرفة قانون حركة الجسيم **r** = **r**(t) ضروري لمعرفة دفع القوة تلك. إذ يحسب التسارع كمشتقة ثانيةٍ من قانون الحركة وباستبدال ذلك وِفْقَاً لقانون نيوتن الثاني نحدد القوة، ثم نحدد الدفع من حساب التكامل 2.5. أما إذا كانت القوة دالة سرجهة **F**=**F**($\boldsymbol{v}$)، فإن حساب سرجهته ضروريٌ لمعرفة دفع تلك القوة. إذ يحسب التسارع كمشتقة أولى من السرجهة ومن ثم نتتبع الخطوات الواردة أعلاه.

الطـــاقـــة: **تلك الكينونة القادرة على إنجاز شغل ما، إما مباشرةً أو من خلال سلسلةٍ من التحولات**. ويُعتبر مفهوم الطاقة رئيسياً في الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء، بل في كل حقل من العلوم الطبيعية، بـــالإضافـــة إلى الهندسة. وتتميز الطاقة بتعدد الأشكال لكنها تلتزم بقانون حفظٍ يُوحد أشكالها المتعددة. و من الضروري في هذا الكتاب، معرفة السمات الميكانيكية للطاقة - طاقة الحركة kinetic energy وطاقة الوضع potential energy. والطاقة الحركية هي الكمية القياسية المساويـــة لنصف حاصل ضرب كتلة الجسيم في مربع سرعته $T=m\frac{v^2}{2}$، أما طاقة الوضع (الطاقة الكامنة) فهي الكمية القياسية المعتمدة كلياً على موضع الجســيم المتحرك؛ أو رياضياً $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$، حيث **r** متجه موضع الجسيم. و بالعادة فإن الطاقة الكلية المكونة من مجموع الطاقتين، الحركية والوضعية لجسيمٍ متحرك تبقى كميةٍ ثابتةٍ. وبمقارنة الطاقةَ بالزَّخَم، نجـــد أن هذا الأخير أبسط من الطاقة

[1] لقد كان **رينيه ديكارت** أول من عرف الزّخَمَ كمفهوم ديناميكي للحركة.

التي تتميز بتعدد الأشكال. بيد أنه أعقد قليلاً لأنه كميةٌ متَّجِهَةٌ وليس كميةً قياسية. وبعد الطاقة الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا القوة والمسافة. كما أن وَحْدَتَها في **النظام الدولي** *SI* للوحدات كيلوغرام متر تربيع مقسوماً على الثانية تربيع، التي هي النيوتن متر. وائتلافُ هكذا وحْدَات يُدعى **الجول** $1\,[J] = 1[Nm] = 1\,[kgm^2/s^2]$.

الزَّخَم الزَّاوِي[2]: هو واحدٌ من تلك المفاهيم الأساسية في الميكانيكا. وهو كمَّيَةٌ متَّجِهَةٌ يأخذ بالاعتبار تأثير زخم الجسيم وبعده عن نقطة القياس. ويُعَّرف ككمَّيةٍ مشتَّقةٍ، بدلالة المفاهيم المألوفة للكتلة والسرجهة وموضع الجسـيم المتحرك. أو رياضياً

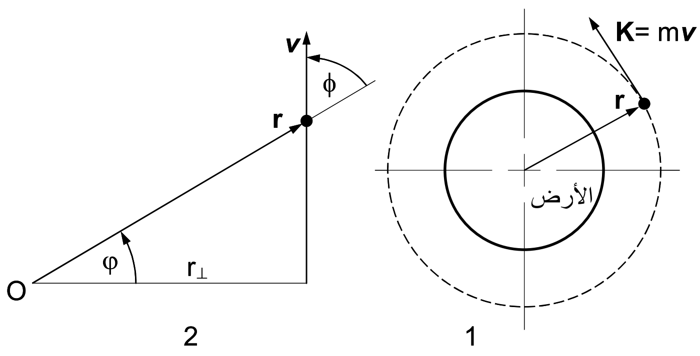
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\,\boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} \qquad 3.5$$

والرمز المألوف للزخم الزَّاوِّيّ هو **L**، أمَّا **r** فهو متَّجِه موضع الجسـيم نسـبة إلى نقطة أصلٍ اعتباطية. وهذا يعني أنّ الزّخَم الزَّاوِّيّ مـقـداراً واتجاهاً، على حدٍ سواء، قد يعتمد على اختيار ومكان نقطة الأصل. وبالتالي فهو كمتَّجِه يعامد المستوى المكون من المتجهين **r** و ***v***. وتُحَدّدْ قاعدة اليد اليُمنى اتجاهَه كحاصل الضرب الاتِّجاهي على امتداد العمود **L** القائم على المسـتوى المذكور، **شـكل 1.5**. أما مقدار الزخم الزاوي فيكون

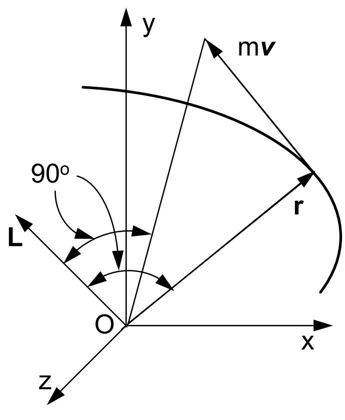
$$L = m\,r\,v \sin\phi = r\,K \sin\phi \qquad 1.3.5$$

حيث ϕ الزاوية المحصورة بين المتَّجِهَين **r** و ***v***. وإذا كانت السرجهة عمودية على متَّجِهِ الموضع **r**، كما هو الحال في الحركة الدائرية حول نقطة إسـنادٍ (أو محـور)، **شـكل 1.2.5**، فإن مقدار الزخم الزاوي يكون

$$\mathbf{r} \perp \boldsymbol{v} \quad \& \quad \phi = 90^\circ \;\Rightarrow\; L = m\,r\,v = r\,K \qquad 2.3.5$$



شـكل 2.5



شـكل 1.5

من جهة أخرى؛ إذا كانت السرجهة متجهةً تماماً نحو نقطة الإسناد، أو بعيدةً عنها (**r** و ***v*** متوازيان) فإن حاصل الضرب الإتجاهي $\mathbf{r} \times \boldsymbol{v}$ يتلاشى، أي يكون الزخم الزاوي صفراً

[2] يعتبر الزخم الزاوي كميةً متجهةً محورية axial vector في حين أن القوة والسرجهة والتسارع والزخم كمياتٌ متجهةٌ قطبية polar vectors. ويختلف المتجه المحوري عن القطبي في ناحيةٍ واحدةٍ فقط هي أنه: إذا قلبت محاور النظام الإحداثي الديكارتي الموجبة إلى سالبةٍ، فإن كل مركبات المتجه المحوري تظل ثابتة؛ في حين أن كل مركبات المتجه القطبي تغير إشـارتها.

$$\mathbf{r} \,//\, \boldsymbol{v} \;\&\; \phi = 0° \quad \Rightarrow \mathbf{L}=0 \qquad 3.3.5$$

أمَّا بالنسبة لاتجاهاتٍ متوسطةٍ للسرجهة، **شـكل 2.2.5**، فإن العامل sin ϕ في المعادلة L=r K sinϕ يجعل مقدار الزَّخَم الزَّاوِي متغيراً، تتراوح قيمته ما بين الصفر و rK. كما أن للجسيم الذي يتحرك بسرجهةٍ ثابتة وفي خطٍ مستقيم زخمٌ زاوِيٌّ ثابت نسبةً إلى أية نقطة ثابتة خارج مساره.

ويمكن إعطاء المعادلات 3.5 تأويلاً ميكانيكياً طريفاً، وذلك لإن الزَّخَم الزَّاوِي يميِّز الحركة الدورانية. فإذا تحرك جسيم في خطٍ مستقيم، متَّجِهاً نحو (مبتعداً عن) نقطةٍ ما، فــإنــه لا يميل إلى الدوران حول تلك النقطة، ولا يكون له زخمٌ زاوِّيٌ بالنسبة إلى تلك النقطة المعينة، معادلة 3.3.5. أمَّا إذا تحرك الجسيم متعامداً مع الخط الذي يصله مع نقطة الإسناد، فإن قابليته للدوران حول تلك النقطة تكون أقصى ما يمكن. وفي تلك الحالة، تتخذ المركبة العمودية K sinϕ قيمتها القصوى K، معادلة 2.3.5. وبين هذين الحدّين يُساهم جزءٌ معين من الزَّخَم ممثلاً في مركِّبته العمودية في دورانه، في حين أن مركبته الموازية للمتَّجِه Kcosϕ لا تفعل ذلك، بل وتدفعه ليتحرك حركةً مستقيمة. وأفضل طريقةٍ للتعرف على ما نُسميه هنا قابلية الجسيم للدوران هي تصور حركة خطٍ وهمي مرسومٌ من نقطة الإسناد إلى الجسيم نفسه. فإذا مــا دار هذا الخط عند حركة الجسيم حول نقطة الإسناد، كان للجسيم زَخَمٌ زاويٌّ، وإذا لم يَدُرْ، بل اكتفى بالامتداد أو الانكماش عند حركة الجسيم، فلا يكون للجسيم زخم زاوي.

وكما يتضح من التعريف فإن البعد الفيزيائي للزَّخَم الزَّاوِيُّ هو حاصل ضرب أبعاد الكتلة والسرجهة والمسافة؛ كما أن وَحْدَتَهُ في **النظام الدولي** *SI* للوحدات هي الكيلوغرام متر تربيع لكل ثانية [kgm^2/s]، أو نيوتن متر ثانية [Nms]. ومن الملائم، من خلال تحليل الحركة أن نُميّز بين ضَرْبَيْن من الزَّخَم الزّاوي: الزَّخَم الزَاويُّ المداريُّ orbital angular momentum، والزخم الزاوي المغزليspin angular momentum. وينشأ الزَّخَم الزّاويُّ المداري، كما هو معروف عن حركة مركز كتلة جسم ما حول نقطة إسنادٍ معينة. أما الزخم الزّاويُّ المغزلي؛ أو كما يُسمّى غالباً **الغزل** spin فهو الزخم الزّاويُّ المقترن بدوران الجسم ذاته، أو بدوران أي نظام حول مركز كتلته. وهذا الأخير سيبحث في **الباب الثامن**.

2.5 قــوانــيــن الــزَّخَــم

لقد تحدّد في البند 1.5 أن الزَّخَم يكتسب أهميةً خاصةً لأنَّه، تحت ظروفٍ معينةٍ (وبالتحديد في الأنــظمــة المعزولة) يكون محفوظاً. وهناك سببٌ آخر يدعو المرء إلى تعريف الزخم: إنَّه خاصية الحركة الأكثر ارتباطاً بالقوة بصورةٍ بسيطــةٍ ومباشرة.

1.2.5 قــانــون تَــغَيُّــر زخــم الجسيــم Momentum Change

معدل تَغَيُّر الزَّخَم يساوي القوة المؤثرة. هذا هو قانون تغير الزخم؛ إذ بمفاضلة المعادلة 1.5 (بما أن الكتلة m ثابتة) يكون:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad 4.5$$

والطرف الأيمن في المعادلة 4.5 هو حاصل ضرب الكتلــة والتسارع، والذي يُساوي القوة المؤثرة على الجسيم حسب قانون نيوتن الثاني. وعلى ذلك يمكن استبدال هذه المعادلة بـــالـــعلاقــة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} \ , \quad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} \qquad 5.5$$

التي تُعرف قانون تغيُّر زَخَم الجسيم بصورةٍ تفاضلية: **المشتقة الأولى لزَخَم جسيمٍ ما يُساوي القوة المؤثرة عليه.** أو بشكلٍ أكثر اختصاراً **القوة تساوي معدل تَغيُّر الزَّخَم.** ويمكن تعريف هذا القانون بطريقة أخرى، وذلك بالربط بين دفع القوة والزخم. فبعد ضرب طرفي المعادلة 5.5 بـــ dt، نحصل على

$$m\,d\boldsymbol{v} = \mathbf{F}\,dt$$

وبإجراء التكامل على طرفي هذه المعادلة، حيث يتغير الزمن t من $t_0 = 0$ إلى t، والسرعة من $\boldsymbol{v}_o$ إل $\boldsymbol{v}$، ثم ربط الناتج مع المعادلة 2.5 نحصل على

$$m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_o) = \int_0^t \mathbf{F}dt = \mathbf{P} \qquad 6.5$$

التي تعرف قانون تَغَيُّر الزَّخَم بصورةٍ تكاملية: **التغير في زخم جسيم ما خلال فترة زمنية معينة يســـاوي دفع القوة المؤثرة الذي زُوِّدَ به الجســـيم في تلك الفترة الزمنية،** أو بشكلٍ أكثر اختصاراً **الدفع يساوي تَغَيُّر الزَّخَم.** وكثيراً ما يُستخدم عند حل المسائل مساقط المعادلة الاتجاهية 6.5 بدلاً من المعادلة نفسها، وعند ذلك تتحدد مركبات دفع القوة **P**

$$m(v_x - v_{ox}) = P_x$$
$$m(v_y - v_{oy}) = P_y \qquad 1.6.5$$
$$m(v_z - v_{oz}) = P_z$$

وفي حالة الحركة المستوية أو المستقيمة، يُعَبَّر عن قانون تَغَيُّر زخم الجسيم بدلالة معادلتين، أو حتى معادلة واحدة من معادلات 1.6.5، اعتماداً على المستوى أو الإحداثي المحدد بالترتيب.

2.2.5 قانون حفظ زَخَم الجسيم Conservation of Momentum

إذا كانت القوة المؤثرة على الجسيم تساوي صفراً، فإن زخم الجسيم يكون كمية ثابتةً في المقدار والاتجاه، بما يعني أن **السرعة ثابتةٌ.** ومن المعادلتين 5.5 و 6.5

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{K} = \text{const}\,,\; m\,\boldsymbol{v} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow m\,\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{v}_o \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o \quad \& \; \boldsymbol{v} = \text{const.} \qquad 7.5$$

هذه المعادلة 7.5، والتي نتجت سواءً من المعادلة 6.5 أو من تكامل المعادلة 5.5، عندما كانت القوة صفريةً $\mathbf{F} = 0$، تُعَرِّف قانون حفظ زَّخَم الجســـيم. وبالتالي، فعند انعدام القوة يتحرك الجســـيم حركةً منتظمةً وبخطٍ مستقيم، التي دعاها **غاليليو** بحركة القصور. من جهة أخرى، إذا تحرك الجسيم بحيث أن القوة ليست صِفْرية، لكن مسقط هذه القوة على أحد المحاور، وليكن Ox مثلاً، يُساوي صفراً $\mathbf{F}_x = 0$، فإن

$$m(v_x - v_{ox}) = \text{const.} \;\Rightarrow\; v_x = v_{ox} = \text{const.} \qquad 1.7.5$$

ولهذا فالجسيم سيتحرك في الاتجاه $\boldsymbol{i}$، حركةً منتظمةً وبخطٍ مستقيم.

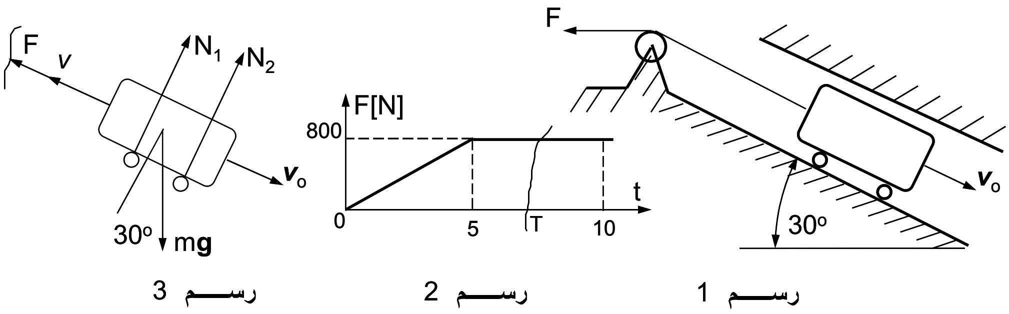
حـــل المسائل بواسطة قوانين الزَّخَم

إن معرفة القوة المؤثرة على الجسيم وزمن الحركه يحدِّدان قيمة التغير في سرعة الجسيم، وذلك بالتطبيق المباشر لقانون تغير الزَّخَم، المعادلتان 5.5 و 6.5. أما إذا كانت حركة الجسيم قصورية، أي لا تأثير لأية قوةٍ عليه باتجاه حركته، فإن سرعـــة الجسيم تتحدد من قانون حفظ الزَّخَم - معادلة 7.5. ومن ذلك نحل المسألة الثانية في الديناميكا.

أسـئـلـــةٌ محـلـولـــة

ســؤال م 1.5

بينما تَنْحدر عربة منجم، كتلتها 100 كيلوغرام على سكة حديدٍ داخل نفقٍ مائلٍ بزاوية 30^o عن الأفقي، بسرعةٍ ثابتةٍ مقدارها v_o = 5 متر / ثانية، بُدِءِ التأثير عليها بالقوةِ **F** التي تتغير زمنياً، **رسم 2**. أوجد بإلغاء الاحتكاك الزمن اللازم لتغير العربة اتِّجَاه حركتها، وما سرعة العربة عند الثانية العاشرة؟



شـــكل م 1.5

الــحـــل

نحدد القوى المؤثرة على العربة وهي قوة الوزن mg للأسفل، ردّا الفعل N_1 و N_2 العموديّان على سكة الحديد، وقوة السحب F للأعلى موازيةً للحركة، **رسم 3**. نفترض أن الزمن اللازم لتغيير العربة اتِّجَاه حركتها (تصبح السرعة صفراً) تساوي T. فباستخدام قانون تَغَيُّر الزَّخم بصورةٍ تكاملية، معادلة 6.5 للاتجاه ***i*** يكون

$$m(v - v_o) = \int_0^T F_x dt \qquad 1$$

$$100(0 + 5) = \int_0^T (F - mg\sin 30^o)dt \qquad 2$$

وباستبدال

$$F = 160\,t \;\; [N] \;\; \forall \;\; 0 < t < 5 \;\; \& \; F = 800 \;\; [N] \;\; \forall \;\; t \geq 5 \qquad 3$$

$$m\,g\sin 30^o = 100 \times 9.8 \times 0.5 = 490 \; [N] \qquad 4$$

في المعادلة 1 ينتج أن

$$500 = \int_0^5 160\,t\,dt + \int_5^T 800\ dt - \int_0^T 490\ dt \quad 500 = 80\,t^2\Big|_0^5 + 800\,t\Big|_5^T - 490\,t\Big|_0^T$$

$$T = 8.06\ [s] \qquad 5$$

ولإيجاد سرعة العربة في الثانية العاشرة نستبدل $T=10[s]$ ومحصلة القوى، معادلات 3 و 4 في المعادلة 1

$$100\left\{v-(-5)\right\} = \int_0^5 160\,t\,dt + \int_5^{10} 800\ dt - \int_0^{10} 490\ dt \qquad 6$$

ولنجد أن حل هذا التكامل بدلالة السرعة يعطي

$$v = 6.0\ [m/s]\ ,\quad \boldsymbol{v} = 6.0\ \boldsymbol{i}\ [m/s] \qquad 7$$

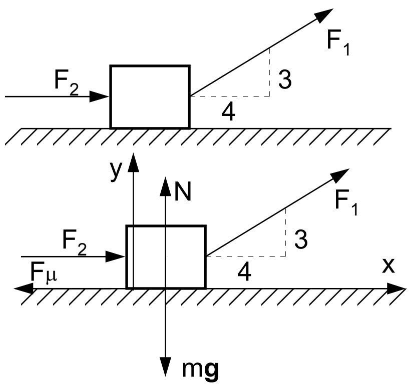
ســؤال م 2.5

يتحرك صندوقٌ، كتلته $m = 50$ كيلوغراماً، على سطحٍ خشن، معامل خشونته الاستاتيكي $\mu_s = 0.2$ بينما معامل خشونته الحركي $\mu_d = 0.186$، تحت تأثير القوتين

$$F_1 = 100\ [N] \quad \& \quad \boldsymbol{F}_2 = 6\,t^2\,\boldsymbol{i}\ \ [N]$$

أوجد سرعة الصندوق في اللحظة $t = 4$ ثانية.

الحـــل



شـكل م 2.5

نحدد القوى المؤثرة على الصندوق، وهي الوزن mg للأسفل، ردُّ الفعل N للأعلى، والقوتان F_1 و F_2 ، رسم 2. وكتطبيقٍ مباشرٍ لقانون نيوتن الثاني، نكتب معادلة حركة الصندوق 1.4.3 التي تعطي بعد إسقاطها على المحور y

$$m\,\ddot{y} = 0 \ \Rightarrow$$

$$N - mg + F_{1y} = 0$$

$$N = m\,g - F_{1y}$$

$$N = 50 \times 9.8 - 60 = 430\ [N] \qquad 1$$

ونحدد قوة الاحتكاك الاستاتيكي

$$F_{\mu s} = \mu_s \times N = 0.2 \times 430 = 86\ [N]\ \ \&\ \boldsymbol{F}_{\mu s} = -86\ \boldsymbol{i}\ [N] \qquad 2$$

وحيث أن اللحظة الابتدائية $t = 0$ تبين أن قوة الاحتكاك الاستاتيكي أكبر من مركبة محصلة القوى الأفقية الأخرى المؤثرة على الصندوق F_x

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 80 + 6\,t^2\ \big|_{t=0} = 80\ [N] \qquad 3$$

$$F_{\mu s} = 86\ [N] > 80 = F_x \qquad 4$$

فذلك يعني انقضاء فترةٍ زمنيةٍ معينة $t = t_1$ يكون الصندوق فيها ساكناً، ولا يقوى على الحراك. مركبة محصلة القوى الأفقية المؤثرة على الصندوق

$$F_x = F - F_{\mu x} = 80 + 6\,t^2\ \big|_{t=0} = 80\ [N]$$

$$F_x = 6\,t^2 - 6 \qquad 5$$

وباستبدال مركبة القوة F_x، معادلة 6.5، بقيمتها، معادلة 5 حيث أن $v_o = v = 0$، يكون

$$\int_0^{t_1} F_x \, dt = 0 \quad \Rightarrow 2\,t_1^3 - 6\,t_1 \quad \Rightarrow t_1 = 1.73\ [s] \qquad 6$$

أي أن سرعة الصندوق ضمن الفترة الأولى $0 < t < 1.73$ ثانية تبقى صفراً. ولحساب السرعة في الثانية الرابعة، $t = 4$ [s] ، نستخدم قانون تَغَيُّر الزَّخَم، معادلة 6.5 للاتجاه الأفقي $\boldsymbol{i}$

$$m(v - v_o) = \int_{1.73}^{4} F_x \, dt = \int_{1.73}^{4} \left(F_{1x} + F_{2x} - F_{\mu dx}\right) dt \qquad 7$$

وباستبدال

$$m = 50\ [kg]\ ,\ v_o = 0\ ,\ F_{1x} = 80\ [N]\ ,\ F_{2x} = 6\,t^2\ [N],$$
$$F_{\mu x} = \mu_d \times N = 0.186 \times 430 = 80\ [N]$$

في المعادلة 7 يكون

$$50(v - 0) = \int_{1.73}^{4} \left(80 + 6t^2 - 80\right) dt \quad \Rightarrow \quad 50 \quad v = 2\,t^3 \Big|_{1.73}^{4}$$

$$v = 2.35\ [m/s]\ ,\quad \boldsymbol{v} = 2.35\,\boldsymbol{i}\ [m/s] \qquad 8$$

3.5 قوانين الزَّخَم الزَّاوِيُّ

1.3.5 قانون تَّغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيُّ Angular Momentum Change

لقد عُرِّف الزَّخَم الزَّاوِيُّ رياضياً بدلالة مفاهيم سبق تأسيسها. ولذلك ليس عجيباً اشتقاق قانون تَغَيُّرِه رياضياً دون الحاجة إلى أساسٍ تجريبيٍ جديد. فنبدأ بمفاضلة طرفي المعادلة 3.5، انظر المعادلة 40.I

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

وحيث إن $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ ، والمتَّجهين $\boldsymbol{v}$ و $m\boldsymbol{v}$ متوازيان، فإن الحد الأول على اليمين في هذه المعادلة يساوي صفراً

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times m\,\boldsymbol{v} = 0$$

كما أن الحد الثاني $\mathbf{r} \times \dfrac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$، بــربطـــه بمعادلة 5.5 يصبح مساويـــاً لعزم دوران القوة

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

والذي بتعويضه في المعادلة الأساسية نحصل على

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_F \qquad 8.5$$

وهذا هو قانون تَغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيُّ لجسيمٍ متأثرٍ بقوةٍ: **المشتقة الأولى للزَخَم الزَّاوِيُّ لجسيم حول مركزٍ ما، يساوي عزم الدوران الرئيسي للقوى المؤثرة على هذا الجسيم حول نفس المركز.** أو بشكلٍ أكثر اختصاراً **عزم القوة الرئيسي يساوي معدل تَغَيُّر الزَّخَمِ الزَّاوِيِّ.** ومن الطبيعي إسناد كلٍ من العزم الدوراني $\mathbf{M}_F$ والزَّخَم الزَّاوِيّ $\mathbf{L}$ إلى نفس نقطة الأصل.

ومن السهولة بمكان التعرف على طريقتين محددتين للتأثير بهما على جسيم ما دون أن تُحْدِث هذه القوة عزماً دورانياً، وهما: القوة تؤثر في نقطة الأصل المختارة، عندئذ يكون $\mathbf{r} = 0$. والقوة تُؤثر باتِّجَاه، أو بعيداً عن نقطة الأصل، عند ذلك يكون **r** موازياً للقوة. وتعتبر قوة الجاذبية أكثر القوى استجابةً للشرط الثاني. ولذلك لا تؤثر الشمسُ - نتيجة قوى الجذب المتبادل بينها وبين الكواكب الأخرى - بأي عزمٍ دورانيٍ على أيِّ كوكب، إذ يكون الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ للكوكب ثـــابتـــاً بالنسبة إلى مركز الشمس.

2.3.5 قـــانـــون حفظ الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ Momentum Conservation of Angular

تحت أي ظرفٍ يظل الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ لجسيمٍ ما ثابتاً؟ ..... تزودنا المعادلة 8.5 بإجابةٍ فوريةٍ. فإذا كان العزم الرئيسي المؤثر على جسيمٍ ما يساوي صفراً، يظل زخمه الزَّاوِيُّ ثابتاً. والمعادلة 8.5 على الصورة المبينة تلك، تنطبق على أي جسيمٍ، وعليه نكتب

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.} \qquad 9.5$$

أي أن الجسيم المتحرك الذي عزمه الدوراني يساوي صفراً، سيكون متحركاً تحت تأثير زَخَمٍ زاويٍّ ثابتٍ مقداراً واتجاهاً. وعلى ذلك، فالزَّخَمُ الزَّاوِيُّ لجســيمٍ ما تحت تأثير قوة مركزية - القوة التي خط عملها يمر بنقطة الإســناد سيكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً. ومن نظرية المتَّجهات والمعادلة 3.5، نستنتج أن الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ كمُتَّجِهٍ يكون عمودياً وثابتاً على كلٍ من المتَّجِهَين **r** و **K**. ولذلك فالمتَّجِهَان المذكوران يُكَوِّنان مستوىً واحداً ووحيدا. أي **أن الجسيم سيتحرك حركة مستويـــةً، إذا كان زَخَمَهُ الزَّاوِيُّ ثابتاً مقداراً واتجاهاً**[3].

حـــلُّ المسائل بواسطة قوانين الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ

إذا تَغَيَّر موضع الجسيم **r** بالإضـــافة إلى (تَغَيُّر) زخمه **K**، فإن قانون تَغَيُّر زَخَمِهِ الزّاويُّ، معادلة 8.5، تُحَدِّد عزم القوة ، أو القوة المؤثرة على الجسيم. وعلى النقيض من ذلك، إذا كان عزم القوة حول محور دورانٍ ما صفراً، فإن تطبيق قانون حفظ الزَّخَمِ الزَّاوِيَ، معادلة 9.5، يضمن إيجاد حركة الجسيم - موضعه أو سرجهته، أي حل المسألة الثانية في الديناميكا.

أســئـــلـــةٌ مـــحـــلـــولـــة

ســـؤال م 3.5

كمثالٍ على كيفية استخدام قانون تَغَيُّر الزَّخَم الزاوي، يمكن إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط، معادلة 6، **ســـؤال م 6.4**، وذلك بالتطبيق المباشر للقانون المذكور. فمن الشكل المذكور سالفاً يكون عزم الدوران

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{r} = R\cos\varphi\, \boldsymbol{i} + R\sin\varphi\, \boldsymbol{j} \;\;\&\;\; \mathbf{F} = mg\, \boldsymbol{j}$$

$$M_F = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & R\cos\varphi & R\sin\varphi \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = -\, mg\, R \sin\varphi\, \boldsymbol{i} \qquad 1$$

[3] لمزيدٍ من المعلومات ، انظر **الباب السادس**: **حركة الجسيم تحت تأثير القوة المركزية.**

أمَّا الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ فيحسب رياضياً من المعادلة 3.5

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v} = -R\,\dot{\varphi}\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + R\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & R\cos\varphi & R\sin\varphi \\ 0 & -R\dot{\varphi}\sin\varphi & R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix} = mR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{i} \qquad 2$$

ولحساب التـــَّغَيـــُّر في الزَّخَمِ الزَّاوِيُّ، نحسب المشتقة الأولى له من معادلة 2

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = mR^2\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{i} \qquad 3$$

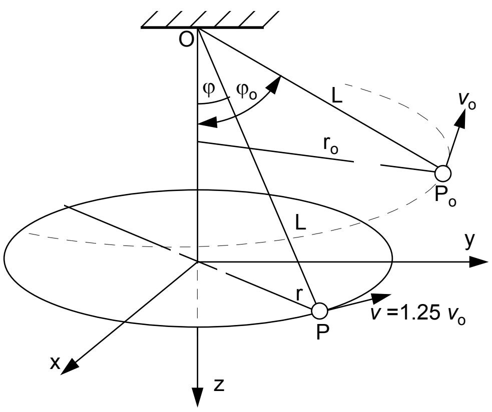
والذي يساوي عزم الدَّوَرَان، معادلة 1، وفْقاً للمعادلة 8.5

$$mR^2\,\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{i} = -m\,g\,R\sin\varphi\,\boldsymbol{i} \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \qquad 4$$

وهي نفس المعادلة 6، **سـؤال م 6.4**

سـؤال م 4.5

انطلق الثقل المربوط بالخيط OP، OP=L في دائرةٍ أفقية عندما قُذِف بالسرجهةِ الابتدائية $\boldsymbol{v}_o$، $\boldsymbol{v}_o = v_o\mathbf{e}_t$ من الموضع P_o. إذا تناقصت الزاوية φ_o التي يصنعها الخيط مع الرأسي إلى φ، وازدادت سرعته إلى المقدار $v = 1.25v_o$ مع بقائها أفقية ومستعرضة. فما مقدار الزاوية φ؟



شـكل م 4.5

الحـــل

عزم الدوران حول المحور Oz يساوي صفراً، لذلك نستخدم قانون حفظ الزخم الزاوي في الاتجاه $\boldsymbol{k}$

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad\Rightarrow\quad L_z = \text{const.}$$

$$L_{zo} = L_z \quad\Rightarrow\quad m\,L\,v_o\sin\varphi_o = m\,L\,v\sin\varphi$$

$$v_o\sin\varphi_o = 1.25\,v_o\sin\varphi$$

$$\therefore\ \sin\varphi = 0.8\sin\varphi_o$$

4.5 شُغْــلُ القُوَّة Work of a Force

نبدأ بتعريف الشغل للحالـــة الخاصة التي تؤثر فيها قوةٌ ثابتةٌ على الجسيم. فإذا عانى هذا الجسيم من تأثير القوة الثابتـــة **F** إزاحةً **S**، فإن الشغل الذي بذلـــتـــه القوة المذكورة على الجسيم يساوي حاصل الضرب القياسي للقوة والإزاحة. أو رياضياً

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

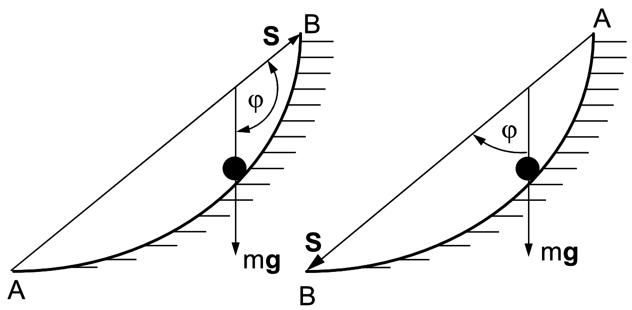
ويبين هذا التعريف على الفور عدة أشياءٍ مهمة عن الشغل. فهو كميةٌ قياسية؛ يتضمن كلاً من القوة المؤثرة على الجسيم و(مسافة) حركة الجسيم، ولا يُعرَّف الشغل عند لحظـــةٍ أو نقطة؛ بل على امتداد فترة. وَوَحْدَتَهُ في **النظام الدُّوليّ** *SI* هي النيوتن متر، التي هي **الجول.** وباستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي للمتَّجِهَات، معادلة I.17، نستطيع كتابة الشغل على الصورة

$$A = F\,S \cos\varphi \qquad 10.5$$

حيث φ الزاوية المحصورة بين متجهي القوة **F** والإزاحة **S**. وللزاوية الحادة φ أقل من 90^{o}، يكون الشغل المبذول موجباً، أي أن القوة تبذل شغلاً موجباً على الجسيم. بينما للزاوية المنفرجة، $90° < \varphi < 180°$، فإن القوة تُعاكس الحركة بصورةٍ عامة، ويكون الشغل سالباً.

وبالعادة نَصِفُ الشغل السالب إمّا بقولنا إن القوة تبذل شغلاً سالباً على الجسيم المتحرك، أو أن الجسيم يبذل شغلاً على محيطه. ولإشارة الشغل المعنى العملي التالي: يكون الشغل موجباً إذا عملت القوة المؤثرة على تسريع الحركة، **شـــكل 1.3.5**، ويكون الشغل سالباً إذا عملت القوة المؤثرة على إبطاء الحركة، **شـــكل 2.3.5**. ولذلك يكون

شغل قوة الجاذبية للجسم الساقط موجباً وشغل قوة الاحتكاك سالباً.



رســـم 2 رســـم 1

شـــكل 3.5

وكما هو معروفٌ من الكينماتيكا، تساوي إزاحة الجسيم الأولية أثناء حركته على منحنىً القيمة المطلقة لمتجه الإزاحة الأولية $d\mathbf{r}$، $dS = |d\mathbf{r}|$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

وباستغلال خاصية الضرب القياسي للمتجهات، معادلة I.24، يكون

$$dA = \mathbf{F}_x dx + \mathbf{F}_y dy + \mathbf{F}_z dz \qquad 11.5$$

هذه المعادلة تعني أن شغل القوة المبذول يساوي جبرياً مجموع أشغال مركباتها F_x، F_y و F_z عند معاناة الجسيم الإزاحات الأولية dx ، dy و dz بالترتيب. وهو يعني تحليلياً أن الجسيم إذا ما عانى الإزاحة الأولية dx فقط فإن شغل القوة **F** الأولي يساوي $\mathbf{F}_x dx$، ولا تبذل باقي مركِّبات القوة F_y و F_z شغلاً على الجسيم، أي أن $\mathbf{F}_y dy = \mathbf{F}_z dz = 0$.

وعلى الغرار نفسه، عند إزاحة الجسيم الأولية dy فإن شغل القوة الأولي يساوي $\mathbf{F}_y\, dy$ فقط، بينما $\mathbf{F}_z\, dz = \mathbf{F}_x\, dx = 0$.
وأخيراً عند معاناة الجسيم الإزاحة الأولية dz فقط فإن شغل القوة الأولي يساوي $\mathbf{F}_z\, dz$ بينما $\mathbf{F}_x\, dx = \mathbf{F}_y\, dy = 0$.
وحيث إن الجسيم يعاني الإزاحات الأولية الثلاث dx، dy وdz في الوقت نفسه، فإن شغل القوة الأولي الكلي يكون بالمجموع الجبري 11.5.

لقد لاحظنا فيما سبق شرحه وبالتحديد المعادلتين 10.5 و11.5، أن مركبة القوة الموازية لمتجه الإزاحة هي التي تبذل شغلاً فقط، بينما لا تبذل مركبة القوة العمودية على متجه الإزاحة شغلاً. بناءً على ذلك، وعند الحركة المنحنية، فإن مركبة القوة المماسية F_t، تعمل على تغيير مقدار سرجهة الجسيم بإكسابه إزاحةً على طول المنحنى وتسارعاً مماسياً a_t، ولهذا ؛ فهي التي تبذل شغلاً. أمّا المركبة العمودية على منحنى الحركة F_n، فهي تعمل على تغيير اتجاه سرجَهة الجسيم $\boldsymbol{v}$، مكسبةً إيّاه تسارعاً عمودياً a_n، دون أن تُؤثر على مقدار سرجهته أو حتى إزاحته من موقعه. ويمكن توضيح ذلك بدلالة الزاوية φ، حيث أن الزاوية المحصورة بين القوة العمودية والإزاحة قائمةٌ، $\cos\varphi = 0$ في العلاقة 10.5، مما يعني أن شغلها ذو قيمةٍ صفرية.

أما إذا كانت القوة المؤثرة على الجسيم غير ثابتةٍ، فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة لإزاحةٍ متناهية الصغر $d\mathbf{S}$ **(الشغل الأولي)**، يُعرف رياضياً بالعلاقة

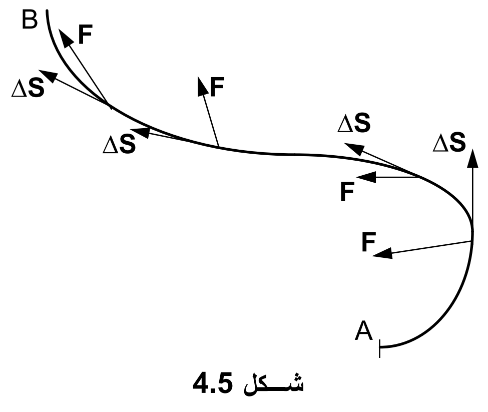
$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

ويُمثل هذا أهم تعريف للشغل في الميكانيكا. وهو يستلزم أنّ تزايداً محدوداً (وبالتالي يمكن قياسه) من الشغل يجب أن يُعَبر عنه على صورة التكامل المحدود

$$A_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \qquad 12.5$$

ويدعى هذا التكامل رياضياً بالتكامل الخطي line integral، لأن قيمته تتحدد على امتداد المسار الفعلي، أو على امتداد خطٍ في المكان (ليس ضرورياً أن يكون خطاً مستقيماً)، يتبعه الجسيم عند إزاحته من A وحتى B. وحساب قيمته ليس بالأمر العسير ميكانيكياً، فلإية إزاحة إضافية ΔS، على امتداد المسار AB، **شـــكل 4.5**، يحسب الشغل الإضافي $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{S}$، وتجمع هذه الكميات القياسية لتحديد الشغل الكلّي.

وأخيراً؛ يمكن الاستنتاج من المعادلات 10.5-12.5أن القوة التي يمكن حساب شغلها بدون معرفة قانون الحركة، هي القوة الثابتة مقداراً واتجاهاً $\mathbf{F} =$ const.، والقوة المعرفة كدالة موضع $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. أما بقية القوى وخاصةً القوة المعرفة بـــدلالة الزمن $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$، أو القوة المعرفة بـــدلالة السرجهة $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\boldsymbol{v})$، فإن معرفة شغل هذه القوى، يستلزم معرفة قانون حركة الجسيم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.



شـــكل 4.5

1.4.5 القوى المحـــافــظة وطاقة الوضع Conservative Forces & Potential Energy

إذا تأثر جسيم بالقوة **F**، (ليس من الضروري أن تكون ثابتة) عند حركته من النقطة A إلى النقطة B، **شكل** 4.5، فإن هذه القوة تبذل شغلاً على الجسيم يمكن تعريفه بالتكامل المحدود 12.5. هذا الشغل يعتمد على ماهية القوة **F** هل هي قوةٌ احتكاكية بين الجسيم المتحرك وسطحٍ ما، أم قوةٌ وزنٍ تحت تأثيرها يتحرك الجسيم. أي عمَّا إذا كانت القوة تعتمد على مسار الجسيم أم لا. هذا يقودنا إلى تعريف مفاهيم جديدة تحدد الشغل المبذول على الجسيم وهي القوى المحافظة وطاقة الوضع اللتان تعرفان بتعريف مجال القوى ودالة القوى.

يعرف الجزء المحدود أو غير المحدود من الفراغ، حيث تؤثر في كلِّ نقطةٍ منه قيمةٌ محددةٌ لكميةٍ فيزيائية بمجال Field تلك الكمية. وبالاعتماد على تلك الكمية هل هي كميةٌ متَّجِهَةٌ أو كميةٌ قياسيةٌ يكون المجال متَّجِهَاً أو قياسياً. ومن أمثلة المجالات القياسية يعتبر مجال درجة الحرارة أشهرها، كما يعتبر مجال القوى ومجال السرجهة ومجال التسارع مجالاتٍ اتجاهية.

كما يعرف مجال القوة Force Field بجزء الفراغ المحدود أو غير المحدود الذي تؤثر في كلِّ نقطةٍ منه على الجسيم المادي الموجود ضمن هذا الفراغ قوةً تعتمد فقط على موضع هذا الجسيم. ويعتبر مجال جاذبية الكوكب أو الشمس مثالاً حياً لمجالات القوى Gravitational Force Field

من جهةٍ أخرى، إذا اتضح وجود دالةٍ أخرى، ولتكن U، $U = U(x,y,z)$ بحيث أن تفاضلاتها الجزيئية بدلالة الإحداثيات الديكارتية تساوي مركبات القوة على تلك المحاور وبالترتيب

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

فإننا نستطيع كتابة محصلة القوى كالمتجه

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 1.13.5$$

أو

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}\ U \qquad 2.13.5$$

أي أن القوة تساوي **تَدَرُّجَ** الدالة U. وتدعى هذه الدالة U بدالة القوة **F**، Force Function. ويعرف مجال تلك القوة بمجال القوة الوضعي أو مجال القوة المحافظ، كما تدعى قوة المجال الوضعي أو قوة المجال المحافظ بالقوة الوضعية أو القوة المحافظة. وإذا عرفنا عنصر الشغل الأولي للقوة المحافظة **F** إذا ما عانى الجسيم إزاحةً أوليةً **dr**

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

فإن استبدال القوة **F** من المعادلة 1.13.5 و $d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$ في هذه المعادلة ينتج

$$dA = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \right\} \cdot \{ dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} \}$$

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad 1.14.5$$

أو بشكل أكثر اقتضاباً

$$dA = dU \qquad 2.14.5$$

أي أن عنصر الشغل الأولي للقوة المحافظة يساوي التفاضل الكلي لدالة القوة U. وبإجراء التكامل على طرفي هذه المعادلة، عند الإزاحة بين النقطتين A و B يكون

$$A_{AB} = \int_A^B dU(x,y,z)$$

لنجد أن الشغل الكلي

$$A_{AB} = U_B - U_A \qquad 15.5$$

يساوي الفرق بين دالتي القوة عند تلك النقطتين النهائية B والابتدائية A، ولا يعتمد على شكل المسار ولا على طوله من A حتى B.

أمّا مفهوم طاقة الوضع، فيعتبر من المفاهيم التي تميز احتياطي الشـــغل الكامن في الجسيم عند موضعٍ معلوم ضمن مجال القوى المحافظ. وهو شكلٌ من أشكال قدرة أو قابلية الجسيم على إنجاز شغل نتيجةً للموقع النسبي الذي يتواجد فيه الجسيم. ولذلك يمكن تعريف طاقة وضع جسيمٍ عند موضعٍ معين بأنها المقدار القياسي الذي يساوي الشغل الذي تبذله قوى المجال عند إزاحة الجسيم من موضعه إلى نقطة الصفر. أي أن

$$\Pi = - A_{AB}$$

$$A_{AB} = \Pi_A - \Pi_B \qquad 16.5$$

وبشكلٍ آخر بدلالة عنصر الشغل

$$d\Pi = - dA_{AB}$$

ونقطة الصفر هنا نقطة اعتباطيةٌ في المجال اصطلح على تحديدها في ذلك الموضع الذي يكون فيه احتياطي الشغل مساوياً للصفر. وينتج من التعريف أن طاقة الوضع تعتمد على إحداثيات الجسيم. أي أن

$$\Pi = \Pi (x,y,z) \Rightarrow d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz$$

وهذه بعد ربطها بالمعادلتين 1.16.5 و 11.5 ينتج أن

$$-\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right\} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

أو

$$\left\{F_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\} dx + \left\{F_y + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\} dy + \left\{F_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\} dz = 0$$

وحيث إن القوة محافظة والشغل المبذول لا يعتمد على مسار الجسيم، فإن هذه المعادلة تصبح صحيحةً لأي قيمٍ تأخذها المتغيرات dx، dy وdz. لذلك فمعاملات هذه المعادلة يجب أن تكون صفراً. أي أن

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

أو

$$\mathbf{F} = -\ \mathbf{grad}\ \Pi \qquad 17.5$$

أي أن القوة المحافظة تساوي التَدَرُّجَ السالب لدالة طاقة الوضع. وإذا ما أخذنا التفاضلات الجزيئية لمركبات القوة F_x و F_y بدلالة الإحداثي y و x بالترتيب

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}$$

ولأن درجة التفاضلات الجزيئية 2 غير أساسية يكون

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

أو بشكلٍ عام

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \qquad 18.5$$

إذ تمثل هذه المعادلات الشرط الرياضي الواجب توفره حتى تكون القوة محافظةً.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سـؤال م 5.5

تؤثر على جسيمٍ ما القوة

$$\mathbf{F} = 6x^2y^3z^4\, \boldsymbol{i} + 6x^3y^2z^4\, \boldsymbol{j} + 8x^3y^3z^3\, \boldsymbol{k} \qquad 1$$

فهل هذه القوة محافظة أم لا؟ وما الشغل المبذول من هذه القوة عند الحركة بين النقطتين $P_o(0,0,0)$ و $P\ (2,2,1)$؟

الـحـل

مركبات القوة من معادلة القوة كمعاملات متجهات الوحدة

$$F_x = 6\,x^2\,y^3\,z^4\ ,\ F_y = 6\,x^3\,y^2\,z^4\ ,\ F_z = 8\,x^3\,y^3\,z^3 \qquad 2$$

والتفاضلات الجزيئية لمركبات القوة

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= 18x^2y^2z^4 = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 24\,x^3\,y^2z^3 = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 24\ x^2\,y^3\,z^4 = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{aligned} \qquad 3$$

ولاستيفاء الشرط 18.5 بالعلاقات 3 تكون القوة **F** محافظة. ولحساب الشغل الناتج من القوة F نستخدم المفهومين: **دالة القوة** U **ودالة طاقة الوضع** Π

1- **دالة القوة** U: من المعادلة 1.13.5 نجد أن

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 6\, x^2\, y^3\, z^4 \qquad 4$$

وبترتيب هذه المعادلة، ثُمَّ إجراء التكامل نجد أن دالة القوة

$$U = \int F_x\, dx = \int 6\, x^2 y^3 z^4\, dx \quad \Rightarrow \quad U = 2\, x^3 y^3 z^4 + f\,(y,z) \qquad 5$$

حيث إن $f(y,z)$ دالة لا تعتمد على الإحداثي x، ولذلك يجب تحديد قيمتها بدلالة الإحداثيّين المتبقيين y و z. التفاضل الجزيئي للدالة U، معادلة 5، بدلالة الإحداثي الثاني y يساوي مركبة القوة F_y

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 6\, x^3\, y^2\, z^4 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \qquad 6$$

وبربط المعادلة 6 مع المركبة F_y، معادلات 2 ، ينتج أن

$$6\, x^3\, y^2\, z^4 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 6\, x^3\, y^2\, z^4$$

أي أن الدالة f لا تعتمد على الإحداثي y أيضاً. ورياضياً فإن

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow f\,(y,z\,) = g\,(z) = \text{const.}$$

حيث إن g دالةٌ تعتمد فقط على الإحداثي z (لا تعتمد على الإحداثيين x و y). نكتب المعادلة 5

$$U = 2x^3y^3z^4 + g(z) \qquad 7$$

وبإجراء التفاضل الجزيئي للمعادلة 7 بدلالة الإحداثي الثالث z ينتج مركبة القوة F_z. أي أن

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 8\, x^3\, y^3\, z^3 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \qquad 8$$

وبربط المعادلة 8 مع F_z، معادلات 2، نحصل على

$$8\, x^3\, y^3\, z^3 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 8\, x^3\, y^3\, z^3$$

أي أن

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = \text{const.}\ ,\ g(z) = C_1$$

وتبعاً لذلك تؤول دالة القوة، المعادلة 7 إلى الشكل الجديد

$$U = 2\, x^3\, y^3\, z^4 + C_1 \qquad 9$$

الشغل المبذول بين النقطتين P_o و P يساوي الفرق بين دالتي القوة U، معادلة 15.5

$$A_{P_oP} = U - U_o$$

$$A_{P_oP} = 2 \times 2^3 \times 23 \times 1 - 0 = 128\ [J\,]$$

2- **طاقة الوضع** Π: ننطلق من المعادلة 17.5 والمركبة الأولى F_x

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 6\,x^2\,y^3\,z^4 \qquad 10$$

وبترتيب هذه المعادلة، ثُمَّ إجراء التكامل نجد أن دالة طاقة الوضع

$$\Pi = -\int 6\,x^2 y^3 z^4\,d\,x$$

$$\Pi = -\,2\,x^3 y^3 z^4 + q\,(y,z) \qquad 11$$

حيث أن $q\,(y,z)$ دالة لا تعتمد على الإحداثي x، ولذلك يجب تحديد قيمتها بدلالة الإحداثيّين المتبقيين y و z. نكتب من المعادلة 17.5، انظر المعادلة 11

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 6\,x^3\,y^2\,z^4 - \frac{\partial q(y,z)}{\partial y} \qquad 12$$

وبربط المعادلة 12 مع F_y من المعادلات 2، ينتج أن

$$6\,x^3\,y^2\,z^4 - \frac{\partial q(y,z)}{\partial y} = 6\,x^3\,y^2\,z^4$$

أو

$$\frac{\partial q(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad q(y,z) = \text{const.}$$

أي أن الدالة q ثابتة المقدار بالنسبة للإحداثي y أيضاً. ورياضياً فإن

$$q(y,z) = r\,(z) = \text{const.}$$

وتؤول، تبعاً لذلك دالة طاقة الوضع إلى الشكل الجديد

$$\Pi = -\,2\,x^3 y^3 z^4 + r(z) \qquad 13$$

وبالطريقة نفسها، نحسب سالب التفاضل الجزيئي للدالة Π، بدلالة الإحداثي الثالث z، معادلة 13، ليساوي F_z

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 8\,x^3\,y^3\,z^3 - \frac{\partial r(z)}{\partial z} \qquad 14$$

وهذه تساوي F_z من المعادلات 2

$$8\,x^3\,y^3\,z^3 - \frac{\partial r(z)}{\partial z} = 8\,x^3\,y^3\,z^3$$

أي أن الدالة r ثابتة في المقدار بالنسبة للإحداثي z. ورياضياً فإن

$$\frac{\partial r(z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(z) = \text{const.} = C_2$$

وبعد استبدال الدالة $r(z)$ في المعادلة 13 بالثابت C_2، نجد أن دالة طاقة الوضع

$$\Pi = -\,2\,x^3 y^3 z^4 + C_2 \qquad 15$$

أخيراً، الشغل المبذول بين النقطتين P_o و P يساوي الفرق بين دالتي طاقتي الوضع، وذلك طبقاً للمعادلة 16.5

$$A_{P_oP} = \Pi_o - \Pi = 0 - (-\,2 \times 2^3 \times 2^3 \times 1) = 128\ [\,J\,]$$

2.4.5 الـقُــدْرَة Power

تُعرف القدرة بأنها المعدل الذي تُنْقَل به الطاقة E من وإلى جسيم ما. وبالعادة يرمز لها بالرمز P

$$P = \frac{dE}{dt}$$

ووحدَة القدرة في **النظام الدولي** *SI* **للوحدات** هي الواط $1\ [W] = 1\ [J/s] = 1\ [N\ m / s]$. وعندما تُؤثر قوةٌ ما على جسيم، تكون القدرة المبذولة لهذا الجسيم

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

أو كحاصل الضرب القياسي

$$P = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad 19.5$$

ويأتي هذا التعريف مباشرة من تعريف الشغل، معادلة 12.5.

3.4.5 أمثلة على حساب الشُغل

شـــغل قـــوة الـــجـــاذبـــيـــة

إذا تحرك جسيم ما، وزنه **mg** من الموضع الابتدائي P_o إلى الموضع P، **شـــكل 5.5**، فإن الشغل المبذول من قوة وزنه يتحـــدد بالمعادلة 12.5. فالإزاحة المتناهية الصغر $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$، والقوة المؤثرة $\mathbf{F} = -mg\,\boldsymbol{k}$. وعليه نكتب الشغل المبذول من قوة وزنه على الصورة التالية

$$A = \int_{P_0}^{P} (-mg\,\boldsymbol{k}) \cdot (dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$

$$= -mg \int_{z_0}^{z} dz$$

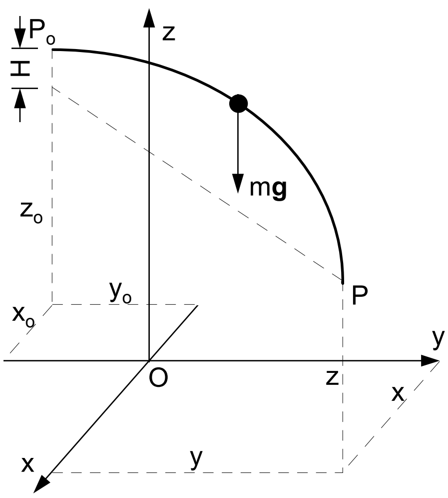
$$A = mg\,(z_o - z)$$

أو

$$A = mg\,H$$

ولأن موقع نقطتي البداية P_o والنهاية P اعتباطيان، فإن فرق ارتفاعهما H يمكن أن يتحدد كأي قيمةٍ، موجبة أو سالبة أو حتى صفراً. ولذلك فالشغل الفعلي لقوة الوزن يمكن أن يأخذ الشكل

$$A = \pm mg\,H \qquad 20.5$$



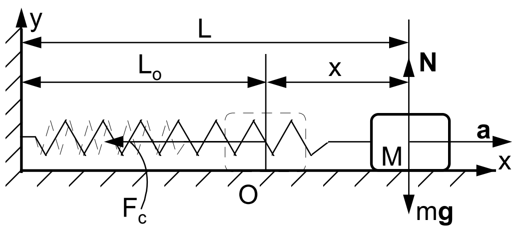
شـــكل 5.5

تكون فيه الإشارة سالبـــةً عند اكتساب ارتفاع، وموجبةً عند فقدانه. وحيث إن الشغل المبذول من قوة الوزن، معادلة 20.5 لا يعتمد على شكل المسار، فإن قوة الوزن تُعتبر قوة مـــحـــافظـــة.

شـــغل الــقـــوة الــمــرنـــة في زنبرك

إذا كان طول الزنـــبرك غير المشدود (وضع الاستقرار) L_o، وشدَّ الزنبرك من طرفه الأيمن بواسطة الثقل M، وزنه **mg**، حتى استطال الزنبرك وأصبح طوله L، **شــكل 6.5**. عندئذٍ تؤثر على الثقل قوة (شدًّ) الزنبرك المرنة F_c لليسار. هذه القوة (المرنة) تتناسب طردياً مع الاستطالة x، حيث ثابت التناسب هو معامل مرونة الزنبرك c، الذي يساوي القوة اللازمة لإزاحة طرف الزنبرك وَحْدَةَ مسافة، بينما اتجاه هذه القوة دائما نحو وضع الاستقرار

$$\mathbf{F}_c = -c\,(L - L_o)\,\boldsymbol{i} = -c\,x\,\boldsymbol{i}$$



شــكل 6.5

من جهة أخرى، تعرف الإزاحة الأولية **dS** في المعادلة 12.5 للزنبرك بالعلاقة $d\mathbf{S} = dx\,\boldsymbol{i}$. وعليه نُعَرِّف الشغل الكلي للقوة المرنة بالتكامل

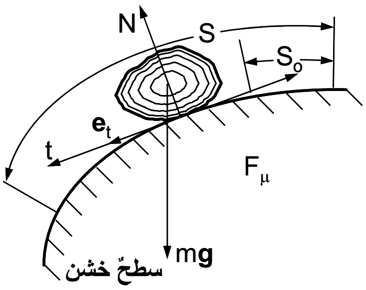
$$A = \int_{L_o}^{L} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\int_0^x c\,x\,\boldsymbol{i}\cdot dx\,\boldsymbol{i} = -c\int_0^x x\,dx$$

$$A = -\frac{c}{2}x^2 \qquad 21.5$$

أي أن شـــغل القوة المرنة المبذول عند اســتطالة الزنبرك من الوضع الأولي (وضع الاستقرار) L_o، إلى الوضع L، $x = L - L_o$، يساوي نصف حاصل ضرب معامل المرونة c بمربع الاستطالة x. وتعرف الاستطالة عدديا بمقدار التغير، الزيادة أو النقصان، في طول الزنبرك نتيجة التأثير عليه بقوة شدٍ أو ضغط. وهذا الشغل، معادلة 21.5، يكون موجباً وسالباً بالاعتماد على وضعية الزنبرك عينه. فشدُّ الزنبرك من طرفه مبتعداً عن وضع الاستقرار يعني أن القوة المرنة في الزنبرك تَبْذُل شغلاً سالباً. وعند رجوع الزنبرك من وضع الشد إلى وضـــعـــه الأولي فإن القوة المرنة تبذل شغلاً موجباً. وكما ورد أعلاه، عند معرفة إشارة شغل قوة الجاذبية فإن شغل القوة المرنة يكون موجباً عندما يكون الزنبرك بوضعٍ يسير فيه نحو الاستقرار، أياً كان مشـــدوداً أم مضغوطاً، ويكون شغلُه سالباً عندما يكون فيه الزنبرك بوضعٍ يسير فيه نحو عدم الاستقرار. وحيث إن هذا الشغل لا يعتمد على شكل المسار الذي يتبعه الجسيم أثناء حركته ، فإن القوة المرنة قوةٌ محافظةٌ.

شغل قوة الاحتكاك الإنزلاقي

نفترض أن جسيماً، يتحرك على سطحٍ خشن في مسارٍ منحنٍ، **شــكل 7.5**. القوى المؤثرة على الجســـيم أثناء حركته، هي قوة وزنه **mg** للأسفل، قوة رد فعل السطح على الجسيم عمودياً على المماس باتجاه الحركة **N**، وقوة الاحتكاك المضادة للحركة، ومقدار هذه الإخيرة $\mathbf{F}_\mu = \mu\,\mathbf{N}$، حيث μ معامل الاحتكاك. ولحساب الشغل الكلي الذي تبذله قوة الاحتكاك، يُحسب التكامل المحدود، معادلة 12.5. فقوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mu = -\mu\,N\mathbf{e}_t$ بينما متجه الإزاحة $d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{e}_t$ حيث إن $\mathbf{e}_t$ متجه الوحدة على امتداد الحركة



شــكل 7.5

$$A = \int_{s_0}^{s} \mathbf{F}_{\mu} \cdot d\mathbf{S} = -\mu \int_{S_0}^{S} N\mathbf{e}_t \cdot dS\mathbf{e}_t = -\mu \int_{S_0}^{S} N dS \qquad 22.5$$

وكحالة خاصـــة إذا كانت قوة الاحتكاك ثابتة في المقدار والاتجاه $\mathbf{F}_{\mu} = const.$، فإن مــقـــدار شُغـلـها الكلي

$$A = \mu N (S - S_o)$$

حيث أن $\Delta S = S - S_0$، طول قوس الحركة. ولأن قوة الاحتـكاك تعتمد على شكل المسار الذي يتبعه الجسيم أثناء حركتـــه، فإنها تُعتبر قوة غير محافظة.

5.5 قانون تغيُّر طاقة حركة الجسيم

إذا اعتبرنا جسيماً، كتلته m، يتحرك تحت تأثير القوة **F**، وبتسارع **a**. وأن معادلة حركته في الاتجاه المماس تعرف بالمعادلة 2.4.3 ، $m\mathbf{a}_t = \mathbf{F}_t$، حيث إن التسارع المماسي بدلالة السرعة والإزاحة $a_t = v\dfrac{dv}{dS}$ ، عندئذٍ تكون معادلة حركة هذا الجسيم هي

$$m\, v \frac{dv}{dS} = F_t$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في dS يكون

$$m\, v\, dv = F_t\, dS$$

وباستبدال الائتلاف $F_t\, dS$ بالشغل الأولي dA الذي أنجزته القوة F_t عند إزاحته الأولية dS، فإنه يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بصيغةٍ أكثر اقتضاباً

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \qquad 23.5$$

حيث تمثل الكميّة على اليسار معدّل تغير الطاقة الحركية. هذه المعادلة 23.5 تعرف قانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورة تفاضلية: **المشتـــقة الأولى لطاقة حركة الجسيم عند إزاحته إزاحةً ما تساوي الشغل الأولـــي المبذول من المتجه الرئيسي للقوى على هذا الجسيم خلال هذه الإزاحة**، أو بصيغةٍ أكثر اختصاراً **يساوي الشغل معدّل تَغيُّر الطاقة الحركية.**

وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة 23.5 وللنهايتين، الابتدائية A والنهائـــيـــة B يكون

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2 = A_{AB} \qquad 1.24.5$$

أو بصيغةٍ أخرى

$$T_B - T_A = A_{AB} \qquad 2.24.5$$

والتي تعرف قانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورةٍ تكاملية: **التغير في طاقة الحركة للجسيم عند إزاحته إزاحةً ما يساوي الشغل المبذول من المتجه الرئيسي للقوى على هذا الجسيم خلال هذه الإزاحة.**

ومن الطبيعي ملاحظة أن قيمتي الطاقة الحركية والشغل المبذول تكون موجبةً إذا كانت السرعة النهائـــيـــة أكبر من السرعة الابتدائية $v_B > v_A$، معادلات 24.5. وبصيغةٍ مكافئة، يكتسب الجسيم طاقةً حركية إضافية وشغله الكلي المبذول يكون موجباً إذا ازدادت سرعته. والعكس صحيح أيضاً.

إن المعادلات 23.5 و24.5 تسري حتى للحركة المقيدة. فالحركة المقيدة بقيودٍ مثاليةٍ، تتحدد باستبدال تأثير القيود بردود أفعالها العمودية على الحركة. وهذا يعطي شغلاً ذا قيمةٍ صفريةٍ، $\mathbf{N}\cdot d\mathbf{S}=0$، أما القيود الحقيقية فمن الضروري الأخذ بالحسبان قوة الاحتكاك الانزلاقي كإحدى القوى المؤثرة عند حساب الشغل الكلي المبذول على الجسيم، معادلة 22.5.

من جهةٍ أخرى، يمكن الربط بين قانوني تغير طاقة الجسيم، معادلة 2.24.5 وتغير طاقة الوضع، معادلة 16.5 لينتج أن

$$T_B - T_A = \Pi_A - \Pi_B \quad \& \quad T_A + \Pi_A = T_B + \Pi_B \qquad 25.5$$

حيث إن مجموع طاقة الوضع وطاقة الحركة لنفس الجسيم هو الطاقة الميكانيكية الكلية، $E = T + \Pi$، وهذه ثابتةٌ للجسيم المتحرك. هذه المعادلة 25.5 تمثل قانون (مبدأ) حفظ الطاقة الميكانيكية، والذي يُستخدم للأجسام التي تبذلُ شغلاً ناتجاً من مجال القوى المحافظ.

حــلُّ المسائل بواسطة قوانين الطاقة

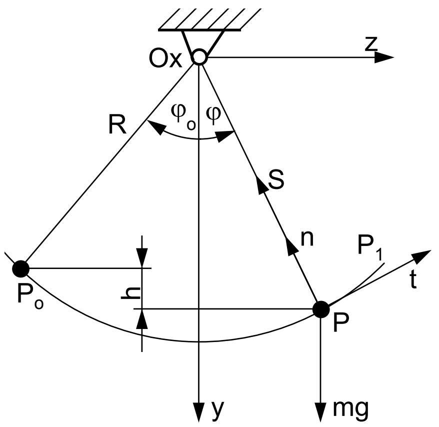
يتم ذلك إذا عُرِفَت المسافة التي يقطعها الجسيم - إزاحته - وسرجهته في الموقعين الابتدائـــي والنهائـــي. إن ذلك يكفل تحديد القوة (المسألـــة الأولى في الديناميكا)، مباشرةً من المعادلات 23.5 و 24.5.

أسـئـلـــةٌ مـحـلـولـــة

سـؤال م 6.5

أوجد السرعة الزاوية للبندول البسيط، مستخدماً قانون تغير الطاقة الحركية

الـحـل



شـكـل م 6.5

نحسب الطاقة الحركية للجسيم في الموضعين P_o و P

$$T_o = \frac{m}{2}v_o^2 \quad , \; T = \frac{m}{2}v^2 \qquad 1$$

وبدلالة الزاوية القطبية تكون السرعات

$$v_o = R\dot{\varphi}_o, v = R\dot{\varphi}$$

وبالتالي فالطاقة الحركية للجسيم في الموضعين المذكورين أعلاه

$$T_o = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}_o^2 \; , \; T = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 \qquad 2$$

الشغل المبذول من القوى المؤثرة على الجسيم أثناء حركته من الموضع P_o وحتى الموضع P يساوي شغل قوة الجاذبية كقوةٍ وحيدة تكسب ارتفاعاً، مقداره h وحسب المعادلة 20.5 (أنظر لاتجاه المحور y)

$$A_{P_oP} = mgh \qquad 3$$

وبدلالة الزاوية القطبية φ

$$A_{P_oP} = mg\, R\, [\cos\varphi - \cos\varphi_o] \qquad 4$$

وباستبدال فرق الطاقة، معادلات 2 والشغل المبذول، معادلة 4 في المعادلة الرئيسية 24.5 نجد أن

$$R^2\,\dot\varphi^2 - R^2\,\dot\varphi_o^2 = 2\,g\,R\,[\cos\varphi - \cos\varphi_o]$$

أو

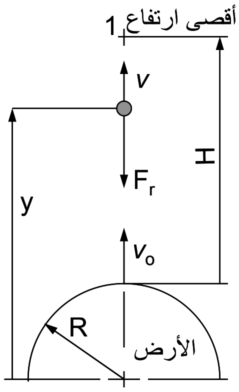
$$\dot\varphi^2 = \dot\varphi_o^2 + 2\frac{g}{R}[\cos\varphi - \cos\varphi_o] \qquad 5$$

وهي نفس المعادلة 8، الواردة ضمن حل **سؤال** م 6.4، ص 108.

سـؤال م 7.5

حل **سـؤال م 8.3** مستخدماً قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، والمعادلة 25.5 في الإحداثيات القطبية بالتحديد.

الـحـل



شـكـل م 7.5

قانون الجذب العام

$$F_r = -\,m\,g\,\frac{R^2}{r^2} = -\frac{\partial\Pi}{\partial r}$$

طاقة وضع الجسيم

$$\Pi = -\,m\,g\,\frac{R^2}{r} \qquad 1$$

طاقة الحركة وطاقة الوضع للجسيم في الموضع o على سطح الأرض

$$T_o = \frac{m}{2}v_o^2 \quad ,\ \Pi_o = -m\,g\frac{R^2}{r}\Big|_{r=R} = -\,m\,g\,R \qquad 2$$

ولأقصى ارتفاعٍ يصله الجسيم، الموقع 1

$$T_1 = \frac{m}{2}v_1^2 = 0 \quad ,\ \Pi_1 = -m\,g\frac{R^2}{r}\Big|_{r=R+H} = -\,m\,g\frac{R^2}{R+H} \qquad 3$$

وباستبدال العلاقات 2-3 في المعادلة الرئيسية لحفظ الطاقة الميكانيكية 25.5 يكون

$$\frac{m}{2}v_o^2 - m\,g\,R = 0 - m\,g\frac{R^2}{R+H}$$

أو

$$v_o^2\,(R+H) - 2\,gR\,(R+H) + 2\,gR^2 = 0 \qquad 4$$

وبالتالي فالارتفاع H يأتي كحل للمعادلة 4

$$H = \frac{v_o^2\,R}{2gR - v_o^2} \qquad 5$$

وكلما كانت $v_o^2 < 2\,g\,R$ يصل الجسيم المعين للارتفاع H، ثُمَّ يهوي للأرض ثانيةً. وإذا كانت $v_o^2 = 2\,g\,R$، فإن الجسيم سيستمر في ابتعاده عن الأرض. وحتى يصل للارتفاع H، نحسب السرعة الابتدائية من المعادلة 5

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,gRH}{R+H}} = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{1+\dfrac{H}{R}}} \qquad 6$$

و إذا ما قذف الجسيم لارتفاعٍ قريب فإن $\frac{H}{R} \to 0$ ، و المعادلة 6 تصبح

$$v_o = \sqrt{2gH} \qquad 7$$

السرعة الابتدائية التي يجب أن يتزود بها الجسيم لحظة إطلاقه من سطح الأرض حتى يصل لارتفاعاتٍ شاهقةٍ ، ما لا نهاية، $H = R << H_{max}$

$$v_o = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}} = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{R}{H}}} \qquad 8$$

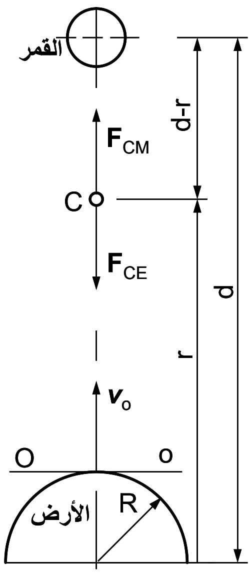
و نهاية هذا المقدار عندما تكون $H \to \infty$ أو $\lim\limits_{H\to\infty} \frac{R}{H} = 0$ تعطي السرعة الابتدائية

$$v_o = \sqrt{2gR} \qquad 9$$

وهي السرعة الفضائية الثانية (سرعة الإفلات) اللازمة لإفلات جسيمٍ من جاذبية الأرض.

سـؤال م 8.5

استخدم حلَّ **سـؤال م 11.3** وقانون حفظ الطاقة الميكانيكية لحساب سرعة انطلاق القمر الصناعي الابتدائية v_o من سطح الأرض حتى يصل للارتفاع r. استخدم **جدول المعلومات الفلكية** الوارد في **الباب السادس**.



شـكل م 8.5

الـحـل

نكتب قانون حفظ الطاقة الميكانيكية للقمر الصناعي بين سطح الأرض كمستوى إسنادي datum plane و الموقع C

$$T_O + \Pi_O = T_C + \Pi_C \qquad 1$$

الطاقة الحركية الابتدائية

$$T_O = \frac{1}{2} m v_o^2 \qquad 2$$

حيث m كتلة القمر الصناعي. طاقة الوضع

$$\Pi_O = -\frac{GM_M m}{d-R} - \frac{GM_E m}{R} \qquad 3$$

وحيث إن كتلة الأرض أكبر من كتلة القمر بـــ 79 مرة

$$M_E = 79 M_M \Rightarrow GM_E = gR^2 \ \& \ 79\, GM_M = gR^2 \qquad 4$$

فإن

$$\Pi_O = -gR^2 m \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{79(d-R)} \right\} \qquad 5$$

الطاقة الحركية في الموقع C

$$v_C = 0 \Rightarrow T_C = 0 \qquad 6$$

كما أن عملية القياس على العلاقة 5 تمكننا من حساب طاقة الوضع للقمر الصناعي في الموقع C

$$\Pi_C = -gR^2 m\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{79(d-r)}\right\} \qquad 7$$

وبتعويض العلاقات 2 و 5-7 في المعادلة الأساسية 1

$$\frac{1}{2} m v_o^2 - gR^2 m\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{79(d-R)}\right\} = -gR^2 m\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{79(d-r)}\right\} \qquad 8$$

وحل هذه المعادلة بدلالة v_o يعطي

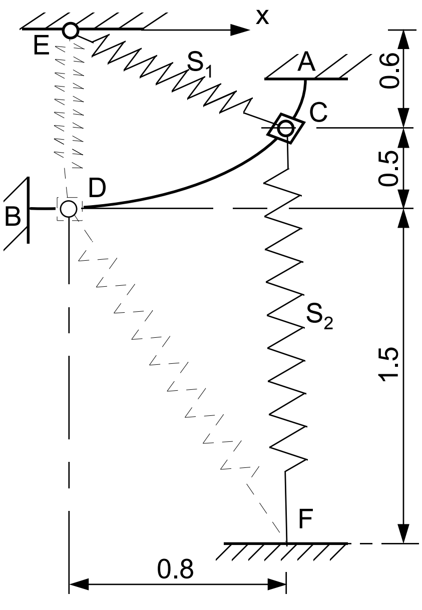
$$v_o^2 = 2gR^2\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{79(d-R)} - \frac{1}{r} - \frac{1}{79(d-r)}\right\} \qquad 9$$

وباستبدال القيم التالية $g = 9.8$ [m/s²]، $R = 6370$ [km]، $d = 384400$ [km] و $r = 346000$ [km] (هذه الأخيرة ناتجةّ من حلّ **ســؤال م 11.3**، ص 91) في معادلة السرعة 9 يكون

$$v_o = 11.06 \text{ [km/s]} \qquad \& \qquad \mathbf{v}_o = 11.06\,\boldsymbol{j} \text{ [km/s]} \qquad 10$$

ســؤال م 9.5

يتزلق طوقٌ، كتلته 40 كيلوغراماً على الدليل المنحني AB المثبت في المستوى الرأسي. ويرتبط به زنبركان، S_1 و S_2، معاملا مرونتهما $k_1 = 500$ نيوتن لكل متر و $k_2 = 600$ نيوتن لكل متر. إذا كان طول الزنبركين الطبيعيين $L_{o1} = 0.6$ متر بينما $L_{o2} = 1.0$ متر بالترتيب، فأوجد سرعة الطوق لحظة وصوله إلى الموقع D، عند تحركه منزلقاً من الموقع C بسرعةٍ ابتدائية مقدارها v_{co}=2.7 [m/s].



شــكل م 9.5

الــحـــل

سنحل هذا السؤال باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، معادلة 24.5، وللوضعين C و D، فنكتب

$$T_D - T_C = A_{CD} \qquad 1$$

نحلل عناصر هذه المعادلة. الطاقة الحركية في الموضع C

$$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2 \;,\; T_D = \frac{1}{2} m v_D^2 = 20 \times 2.7^2$$

$$T_C = 145.8 \text{ [J]} \qquad 2$$

الطاقة الحركية في الموضع D

$$T_D = 20\, v_D^2 \text{ [J]} \qquad 3$$

الشغل الكلي للنظام يكافئ محصلة الأشغال الناتجة من حركة الثقل وقوى الشد في الزنبركين. شغل قوة الوزن

$$A_{mg} = m\; g\; h = 40 \times 9.8 \times \;\Rightarrow A_{mg} = 196 \text{ [J]} \qquad 4$$

شغلا قوتي الزنبركين 1 و 2 بدلالة استطالتيهما S_1 و S_2

$$A_{S1} = -K_1 \int_{0.4}^{0.5} S_1\, dS_1 \quad = -K_1 \frac{S_1^2}{2}\bigg|_{0.4}^{0.5} = \ -250\ [\ 0.5^2 - 0.4^2\ ]$$

$$A_{S1} = -22.5\ [J] \qquad 5$$

$$A_{S2} = = -K_2 \frac{S_2^2}{2}\bigg|_{1}^{0.7} = \ -\ 300\ [\ 0.7^2 - 1^2\ ]$$

$$A_{S2} = 153\ [J] \qquad 6$$

العلاقتان 5 و 6 تبينان أن الشغل الناتج من الزنبرك 1 نتيجة انتقاله بين الموضعين C و D سالبٌ على عكس الشغل الناتج من الزنبرك 2 لنفس الإزاحة. ويرجع ذلك لأن الزنبرك 1 كان مشدوداً في C وازدادت استطالته في D، أي ابتعد عن وضع الاستقرار، بينما تناقصت استطالة الزنبرك 2، واقترب من وضع الاستقرار. محصلة الشغل الناتج على النظام تكافئ المجموع الجبري للأشغال الناتجة من العلاقات 4 - 6

$$A_{CD} = A_{mg} + A_{S1} + A_{S2} = 196 - 22.5 + 153$$

$$A_{CD} = 326.5\ [J] \qquad 7$$

وباستبدال T_C و T_D في المعادلة 1 بقيمهما من المعادلتين 2 و 3 والشغل من معادلة 7 ينتج أن

$$20 v_D^2 \ - 145.8 \ = 326.5$$

$$v_D = 4.86\ [m/s] \qquad 8$$

كما ويمكن حل السؤال نفسه باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، معادلة 25.5، فنكتب الطاقة الميكانيكية للوضعين C و D بعد تعريف المستوى الأفقي المار في D كمستوى إسنادي

$$T_C + \Pi_C = T_D + \Pi_D \qquad 9$$

فنحلل الأجزاء غير المعروفة من عناصر المعادلة 9

$$\Pi_C = mgh + \frac{k_1}{2}(EC - L_{o1})^2 + \frac{k_2}{2}(\ FC - L_{o2}\ )^2$$

$$\Pi_C = 40 \times 9.8 \times 0.5 + 250\ (\ 1.0 - 0.6)^2 \qquad + 300(\ 2.0 - 1.0)^2$$

$$\Pi_C = 536\ [J] \qquad 10$$

$$\Pi_D = \frac{k_1}{2}(ED - L_{o1})^2 + \frac{k_2}{2}(\ FD - L_{o2}\ )^2$$

$$\Pi_D = 250(1.1 - 0.6)^2 + \ 300(1.7 - 1.0)^2$$

$$\Pi_D = 209.5\ [J] \qquad 11$$

وبالتالي نعوض العلاقات 2 - 3 و 10- 11 في المعادلة 1 فنحصل على المعادلة الرياضية

$$145.8 \ + \ 536 \ = \ 20 v_D^2 \ + \ 209.5$$

ومنها نجد سرعة الطوق

$$v_D = 4.86\ [m/s] \ \ \& \ \ \boldsymbol{v}_D = -4.86\ \boldsymbol{i}\ \ [m/s] \qquad 12$$

6.5 حـــل الـمســـائـل

يقوم حل مسائل ديناميكا الجسيم على تحديد القانون الذي يجب استخدامه للحالة المعينة. لقد عُرِّفت القوانين العامة لديناميكا الجسيم بثلاث مجموعاتٍ هي **قوانين الزخم**، البند 2.5، **قوانين الزَّخَم الزَّاويُّ**، البند 3.5 وأخيراً **قانوني تغير طـــاقـــة الحركة وحفظ الطاقة الميكانيكية**، البند 5.5.

ويمكن إجمال المسائل ونوعيتها تبعاً للقوانين الواردة أعلاه

1 - بواسطة **قوانين الزَّخَم**، **تغير الزَّخَم** معادلة 5.5 أو 6.5، **وحفظ الزَّخَم** معادلة 7.5 يمكن حل المســـائل التي تربط بين القوة، زمن الحركة والســـرجهتين الابتدائية والنهائية. وبالعادة تكون القوة إمَّا ثابتةً وإما دالة زمن.

2 - بواسطة **قوانين الزَّخَم الزَّاوِيِّ**، **تغير الزَّخَم الزَّاوِيِّ** معادلة 8.5 **وحفظ الزَّخَم الزَّاوِيِّ** معادلة 9.5 يمكن إيجاد حلول المسائل التي تربط بين كلٍ من القوة ومتَّجِه الموضع والسرجهتين الابتدائية والنهائية. وغالباً ما تكون القوة ثابتةً أو دالة موضعٍ فقط. ومن الســـهولة بمكان ملاحظة أن الفرق بين مجموعتي القوانين الواردة أعلاه هو تبادل المتغيرين زمن الحركة وموضع الجسيم الأماكن.

3 - وأخيراً، بواسطة **قوانين الطاقة**، **تَغَيُّر الطاقة الحركية**، معادلات 23.5 أو 24.5 **وحفظ الطاقة الميكانيكية** معادلة 25.5، يمكن إيجاد حلول المسائل التي تربط بين القوة، متَّجِه الإزاحة والسرجهتين الابتدائية والنهائية. وغالباً ما تكون القوة ثابتةً أو دالة إزاحة فقط.

ويمكن حل المسائل المعقدة أكثر، بالربط بين مجموعتي قوانين أو أكثر في آنٍ واحد. إن الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم** و**الزَّخَم الزَّاويُّ** يضمن إيجاد المتغيرات، القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الموضع. كما أن الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم** و**الطاقة** يضمن إيجاد المتغيرات، القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الإزاحة. وأخيراً يحدد الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم الزَّاويُّ** و**الطاقة** المتغيرات، القوة، متَّجِه الموضع والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الإزاحة.

أسـئـلـة مـحـلولـة

ســؤال م 10.5

يتحرك الثقل المربوط بالخيط OP في دائرةٍ أفقية وبسرجهةٍ ابتدائية مقدارها v_o وذلك عندما كان يصنع زاوية انحرافٍ عن الرأسي مقدارها φ_o. إذا كان φ_{max} أقصى انحرافٍ يصله الخيط الحامل للثقل عن الرأسي، فأوجد قيمة v_o.

الـحـــل

نفترض أن الثقل انتقل من موضعه الابتدائي $\varphi = \varphi_o$ إلى الموضع النهائي $\varphi = \varphi_{max}$ نتيجة قذفه بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارها v_o. يتحدد فرق الارتفاع بدلالة الزاويتين الابتدائية والنهائية حيث

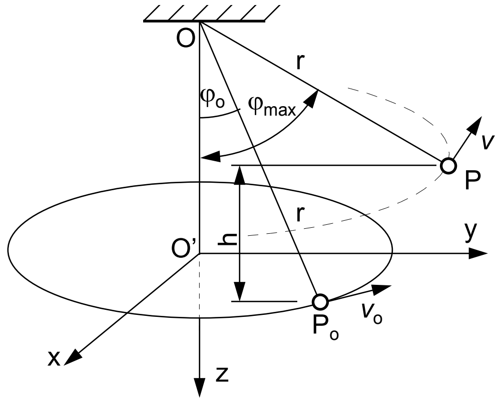
$$h = r\,(\cos\varphi_o - \cos\varphi_{max}) \qquad 1$$

وبتعويض هذه القيمة في قانون تغير الطاقة الحركية للثقل، معادلة 24.5، حيث تتغير السرعة من v_o إلى v مستهلكاً في الوقت نفسه شغلاً مقداره mgh

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_o^2) = m\,g\,h \qquad 2$$

وباستبدال h من العلاقة 1 يكون

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_o^2) = -m\,g\,r(\cos\varphi_o - \cos\varphi_{max}) \qquad 3$$



شـــكل م 10.5

من جهةٍ أخرى، يكون الزخم الزاوي للثقل ثابتاً في الاتجاه ***k*** لتلاشي عزم الدوران في ذلك الاتجاه (عزم الدوران يساوي صفراً)

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = \text{const.} \;\Rightarrow\; L_{zo} = L_z$$

$$m\,r\,v_o \sin\varphi_o = m\,r\,v \sin\varphi_{max}$$

$$\Rightarrow v = v_o \frac{\sin\varphi_o}{\sin\varphi_{max}} \qquad 4$$

وبربط المعادلة 4 مع المعادلة 3، ثمَّ حلِّ الناتج بدلالة السرعة الابتدائية v_o يكون

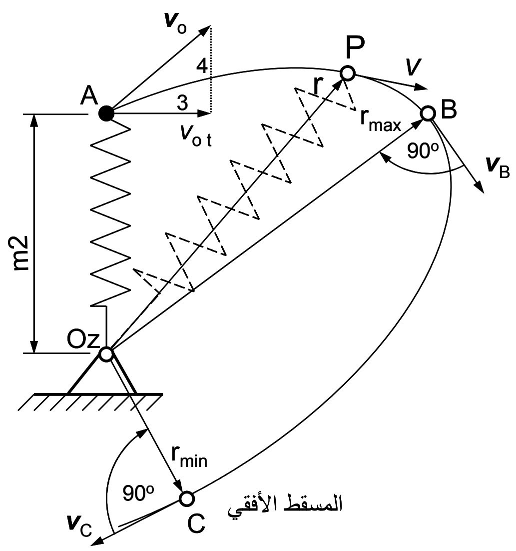
$$v_o = \sqrt{2\,g\,r\,\frac{(\cos\varphi_o - \cos\varphi_{max})}{1 - \dfrac{\sin^2\varphi_o}{\sin^2\varphi_{max}}}} \qquad 5$$

سـؤال م 11.5

يرتبط جسيمٌ كتلته 3 كيلوغرام بزنبرك، معامل مرونته نيوتن/متر. ما البعد الأقصى والبعد الأقرب عن مركز الجذب O الذي يصله الجسيم أثناء حركته؟ وأوجد سرعتي الجسيم عندئذٍ بعد انطلاقه من الموقع A على السطح الأفقي بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 1.5 متر/ثانية. طول الزنبرك الطبيعي يساوي 1.5 متر.

الـــحـــل

إذا افترضنا أن الجسيم يصل أقصى بعدٍ له عند النقطة B، ويصل أقلّ بعدٍ له عند النقطة C، فإن سرعتهِ عندئذٍ تكون عموديةً في النقطتين على متجه الموضع. وبتطبيق قانون تغير طاقة حركة الجسيم بين أيٍ من الموضعين B و C مع A يكون



شـــكل م 11.5

$$\frac{3}{2}(v^2 - 15^2) = -\frac{300}{2}\left[(r - 1.5)^2 - 0.5^2\right] \qquad 1$$

حيث إن r بعد الجسيم أثناء حركته عن المركز O. من جهةٍ أخرى، لعدم تأثير أيّة قوى في الاتجاه الرأسي ***k***، يساوي عزم الدوران حول المحور Oz، العمودي على مستوى الرسم صفراً، وتبعاً لذلك، يكون الزخم الزاويُّ حول نفس المحور ثابتاً. فمن معادلة 8.5

$$M_{Fz} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dL_z}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = \text{const.} \;\Rightarrow L_{zo} = L_z$$

$$m\, r_A\, v_{o\,t} = m\, r\, v = \text{const.}$$

أو بشكلٍ أبسط بعد حذف m وتعويض $v_{ot} = 3v_o / 5 = 9$ [m/s] و $r_A = 2$ متر يكون

$$2 \times 9 = r\; v \;\Rightarrow\; v = 18 / r \qquad 2$$

وبتعويض v من المعادلة 2 في المعادلة 1، ثم ترتيب الناتج نحصل على المعادلة ذات الرتبة الرابعة

$$r^4 - 3\,r^3 - 0.25\,r^2 + 3.24 = 0$$

وهذه المعادلة تعطي حلاً يبين أن أقل وأكبر بعدين يكونان

$$r_{min} = 1.165\ [m] \quad , r_{max} = 2.96\ [m]$$

بينما السرعتان

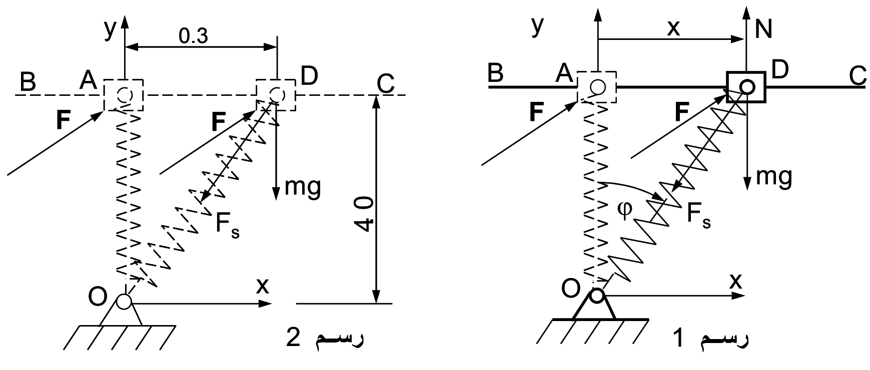
$$v_C = 14.5\ [m/s]\ , \quad v_B = 6.06 [m/s]$$

سؤال م 12.5

يتحرك طوقٌ، كتلته 40 كيلوغراماً على دليلٍ أفقيBC باحتكاكٍ بسيط، مقداره $\mu_d = 0.18$، بينما تؤثر عليه القوة الثابتة في المقدار والاتجاه

$$\mathbf{F} = 135\,\boldsymbol{i} + 120\,\boldsymbol{j}\ \ [N]$$

أوجد معامل مرونة الزنبرك k، الموجود في المستوى الرأسي الذي يجعل الطوق يتحرك بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 1.67 متر لكل ثانية عندما كان في الموقع A ويصل إلى الموقع D بسرعةٍ تزيد 20 % عن سرعته الابتدائية. طول الزنبرك الطبيعي يساوي 0.4 متر.



شكل م 12.5

الحـــــل

سنحل هذا السؤال باستخدام قانون تغير الطاقة الحركية وبشكلٍ مباشر

$$T_D - T_A = A_{AD} \qquad 1$$

فنحلل عناصر هذه المعادلة ونحسب قيمها

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{40}{2} 1.67^2 = 55.778 \; [J] \qquad 2$$

$$T_D = \frac{1}{2} m v_D^2 = 20 \times 2^2 = 80 \, [J] \qquad 3$$

حيث إن

$$v_D = v_A \times 120\,\% = 120\% \times 1.67 = 2 \; [m/s] \qquad 4$$

من جهةٍ أخرى، نحسب رد فعل الدليل على الطوق

$$N = mg - F_y + F_s \cos\varphi \qquad 5$$

$$= 40 \times 9.8 - 120 + k\left[\sqrt{x^2 + 0.4^2} - 0.4\right] \frac{0.4}{\sqrt{x^2 + 0.4^2}}$$

$\therefore$ قوة رد الفعل الدليل كدالة x

$$N = 272 + 0.4\,k\left[1 - \frac{0.4}{\sqrt{x^2 + 0.4^2}}\right]$$

بينما قوة الاحتكاك المؤثرة على الطوق

$$F_\mu = \mu\, N = 0.18\left\{272 + 0.4\,k\left[1 - \frac{0.4}{\sqrt{x^2 + 0.4^2}}\right]\right\}$$

$$F_\mu = 48.96 + 0.072\,k\left[1 - \frac{0.4}{\sqrt{x^2 + 0.4^2}}\right]$$

وتبعاً للمعادلة 12.5 نحسب شغل قوة الاحتكاك عند الإزاحة من $x = 0$ وحتى $x = 0.3$ [m]

$$A_{F\mu} = -\int_0^{0.3} \mathbf{F}_\mu \cdot dx\, \boldsymbol{i} = -\left\{49\int_0^{0.3} dx + 0.072\,k\left[\int_0^{0.3} dx - 0.4\int_0^{0.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0.4^2}}\right]\right\}$$

$$A_{F\mu} = -\left\{49\,x + 0.072\,k\left[x - 0.4\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 0.4^2}\right)\right]\right\}\Bigg|_0^{0.3}$$

$A_{F\mu}$ = -14.688 - 0.00163736 k [J] 6

شغل القوة F_x

A_{Fx} = $F_x \times x$ = 135 × 0.3 = 40.5 [J] 7

وأخيراً، نحسب شغل القوة المرنة

$$A_{Fs} = -\frac{k}{2}\left(\overline{OD} - \overline{OA}\right)^2$$
$$= -0.5\,k\,(0.5 - 0.4)^2$$
$$A_{Fs} = -0.005\,k\ [\,J\,] \qquad 8$$

الشغل الكلي يحسب كمحصلة المعادلات 6 - 8

A_{AD} =-14.688 - 0.00163736 k + 40.5 - 0.005 k

A_{AD} = 25.812 - 0.00663736 k 9

وباستبدال طاقتي الحركة T_A ، T_D والشغل A_{AD} في المعادلة 1 من العلاقات 2 ، 3 و 9 بالترتيب، نحصل على المعادلة الرياضية

80 - 55.778 = 25.812 - 0.00663736 k 10

والتي يعطي حلها قيمة معامل مرونة الزنبرك

k   = 239.55 [N/m] 11