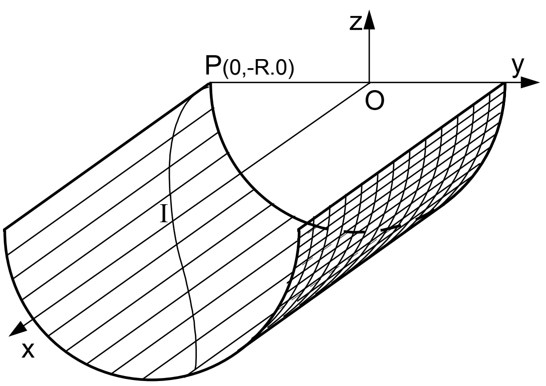
الباب الرابع

حركة الجسيم المقيدة CONSTRAINT MOTION OF APARTICLE

1.4 القيد، مبدأ التحرر من القيد Constraint, Principle of Freedom

لقد درسنا في الباب الثالث حركة الجسيم المتأثر بقوةٍ أو محصلة قوىً اعتماداً على قوانين نيوتن. وقد كانت حركة هذا الجسيم محددةً بمسارها الوهمي في الفراغ عند المعرفة التامة للقوة المؤثرة عليه مقداراً واتجاهاً. وعلى النقيض من ذلك ، تتبع بعض الأجسام الأخرى المتأثرة بقوىً معينةٍ عند حركتها مساراً واضحاً وملموساً، كانزلاق عربةٍ على سكة حديد أو حركة حلقةٍ على سلكٍ منحنٍ. هذا التحديد لحركة الجسيم لم يأت من الشروط الابتدائية للحركة، ولا من القوة الخارجية المؤثرة عليه، بل من جسمٍ أو أجسامٍ أخرى تؤثر على الجسيم المتحرك تأثيراً متصلاً، تَحُدُّ من حركته وتلزمه بمسار محدد. هذا الجسم أو الأجسام الأخرى المرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالجسيم المتحرك يُسمى قيداً.

ويدعى الجسيم المتحرك على سطحٍ معيـــن أو على منحنىً معلوم، ويــكون مجبراً على تلك الحركة، تحت تأثــير قوىً معينةٍ بالجسم المقيد، كما تدعى حركـــتــه بالحركــة المقيّدة. وتسمى المعادلـــة التي تُعَرِّف السطح أو المنحنى أو حتى الخط، حيث يجبر الجسيم المتحرك بالسير عليه، متلاصقاً به **بمعادلة القيد**. ومن الضروري أن تُحَقِّق إحداثيات الجسيم المتحرك معادلة القيد.



شـــكـل 1.4

لنتأمل حركة كُرَيَّةٍ داخل قناةٍ اسطوانية المقــطـــع وأفقية، **شـــكل 1.4**. فبعد دفعةٍ قليلة باتجاه المحور Ox من الموضع الابتدائي (0,-R,0)، تتحرك الكريَّة على سطح القناة الداخلي تبعاً للمسار I، ودونما قفزٍ أو انفصال عن السطح. إنَّ أيّ نقطةٍ من نقاط هذا المسار، ستحقق معادلة القيد - القناة الاسطوانية

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

وعلى هذا الأساس، فعند الحركة المقيدة للجسيم، يجب أن تكون الشروط الكينماتيكية الابتدائية مُحدّدةٌ، إذ يجب أن تُحقِق إحداثيات الجسيم في كل لحظـــةٍ، حتى اللحظة الابتدائية معادلة القيد.

بناءً على ما ورد، يكون الجسيم مـــقيـــداً إذا كانت حركته لأي سببٍ مُحددّةً بمسارٍ معروف، كأن يكون الجسيم مربوطاً بخيط إلى محور تعليق أو منزلقاً على سطحٍ محدد، ويكون الجسيم مرتبطاً ارتباطاً وثيقاً بهذا المسار أو القيد، يلاصقه وينزلق عليه.

ويمكن اعتبار الجسيم المقيد حراً من قيوده وحراً في حركته متى استبدلنا القيود بمحصلة ردود أفعالها (تأثيرها) على الجسيم المعين. فإذا افترضنا أن محصلة القوى المؤثرة عليه هي **F**، وأن **R** هي محصلة جميع ردود الأفعال، فإن القانون الأساسي لحركة هذا الجسيم المقيد يأخذ الشكل التالي

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad 1.4$$

حيث أن **a** مُتّجِهُ تسارع الجسيم، و m كتلته. ويسمى مبدأ استبدال القيود بردود أفعالِها **بمبدأ التحرر من القيد.**

2.4 معادلة القيد، أنواعه

أياً كان القيد ودون اعتبارٍ لطريقة تركيبه أو للشكل الذي يأخذه يمكن استخراج معادلته تحليلياً لتأخذ الشكل الضمني التالي

$$f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \qquad 2.4$$

ولذلك؛ فمعادلة الــقـيـــد تعتمد على الزمن ومتَّجِه الموضع **r** والسرجهة $\dot{\mathbf{r}}$. وقد تعتمد على متغيراتٍ أخرى لا مجال لذكرها الآن. أي متغيرٍ من هذه المتغيرات t، **r** و $\dot{\mathbf{r}}$ يُكْسِبُ القيد التسمية المناظرة**.** فالقيد الذي لا يعتمد على الزمن صراحةً، $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$، يدعى بالمستقر stationary. والقيد الذي لا يعتمد على السرجهة يسمى بالهولونومي (الهندسي) holonomic. وهناك القيود الإسكليرونومية scleronomic التي تَستوفي الشرْطين السابقين فلا تعتمد على الزمن ولا على السرجهة، والقيود الهولونومية الزمنية- تُدعى بالريونومية- rheonomic، التي تعتمد على الزمن صراحةً ولا تعتمد على السرجهة. معادلة القيد الريونومي الاتجاهية

$$f(t, \mathbf{r}) = 0$$

وهذا النوع من القيود سيبحث في **الباب العاشر**، بينما يقتصر العمل في هذا الباب على معرفة وحل المسائل التي تحوي قيوداً إسكليرونومية، معادلتها الاتجاهية تأخذ شكل المعادلة الأخيرة بدون الزمن

$$f(\mathbf{r}) = f(x,y,z) = 0 \qquad 3.4$$

والقيود تظهر للجسيم المتحرك وللنظام الديناميكي أو الميكانيكي على شكل خيوطٍ ، قضبان، مفاصل، مساند ثابتة أو متحركة، منحنياتٍ سلكية أو غيرها، أو حتى سطوحٍ يجبر الجسيم المتحرك أو النظام حال ارتباطه بهذا القيد على الحركة المحددة ضمن مسارٍ محدد. وتعتبر كل آليّة في الطبيعة قيداً مركباً أو حتى نظاماً مقيداً يحوي عدة قيود. وإذا كان

حامل الثقل P في البندول البسيط، **شــكل 5.4**، قضيباً عديم الوزن وبنفس طول الخيط، فإن هذا الأخير سيجبر الكتلة نفسها على الحركة الدائرية المحددة بالقوس P_oP، والمعرّف رياضياً إما بالزاوية φ أو الإحداثيات الديكارتية y و z. ولذلك فالمفصل والقضيب يشكلان قيداً (مركباً) للكتلة المتحركة، والمنحنى الدائري الذي مركزه O ونصف قطره OP يرسم المسار المحدد لهذه الكتلة.

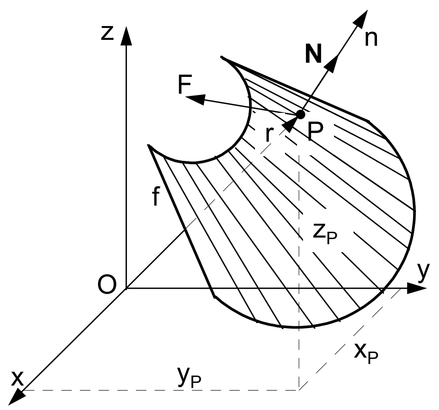
ومن المهم التنويه إلى أن ردّ فعل الســطح أو المنحنى الأملس على الجســيم المتحرك يكون عمودياً على الســطح أو المنحنى في نقطة التماس. وتدعى هذه القيود، حين يتلاشــى الاحتكاك عند الحركة بالقيود المثالية ideal constraints. وعلى النقيض من ذلك تدعى القيود التي يظهر فيها الاحتكاك كقوة إعاقة بالقيود الحقيقية.

3.4 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد في الإحداثيات الديكارتية

1.3.4 حركة الجسيم المقيد بسطحٍ أملس

إذا افترضنا قيداً إسكليرونومياً وأملساً يتمثل كسطحٍ منحن، معادلته 3.4، فإن ردَّ فعله على الجسيم المتحرك يكون متعامداً في نقطة التلامُس بسبب انعدام الاحتكاك، **شــكل 2.4**. وباستبدال تأثير القيد **R** بردِّ فعله **N**، و **F** محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم ، كوزنه **mg** مثلاً، نكتب المعادلة 1.4 بدلالة مركباتها على المحاور الديكارتية المتعامدة

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\ddot{x}=F_x+N_x$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=m\ddot{y}=F_y+N_y \qquad 4.4$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=m\ddot{z}=F_z+N_z$$



شــكل 2.4

هذه المعادلات الثلاث تحوي ستة مجاهيل، ثلاثة مجاهيل للإحداثيات x، y و z، وثلاثة مجاهيلٍ لمركبات ردِّ الفعل N_x، N_y و N_z. وبالأخذ بعين الاعتبار معادلة القيد 3.4 ومعادلات الحركة 4.4، كمجموع أربع معادلات، فإنه يلزمنا معادلتين إضافيتين لحلّ هذه المسألــة رياضياً.

وبالاعتماد على البديهية القائلة بأن رد فعل السطح الأملس عموديٌ عليه، لإلغاء الاحتكاك الموازي عكسياً للحركــة، فإننا نستطيع أن نرسم في موضع تلامس الجسيم المتحرك P متّجه التَدَرُّجَ[1] **grad** f عمودياً على السطح ومُنطَبقاً على العمود المقام من نفس موضع الجسيم على السطح المــحـــدد Pn. أي أن

$$\mathbf{grad}\, f \equiv \frac{df}{dn}\,\mathbf{e}_n \quad \& \quad \nabla f \equiv \frac{df}{dn}\,\mathbf{e}_n \qquad 5.4$$

[1] **التَدَرُّجَ** أو الانحدار gradient يكتب رياضياً **grad** f أو ∇f، ويقرأ del f (دِلْ f) أو Nabla (نَابْلَه).

حيث $\mathbf{e}_n$ مُتّجِهُ وَحْدَةٍ عمودي على السطح، يُوَضّح الاتجاه الذي يكون فيه $df > 0$. أمَّا $\frac{df}{dn}$ فهو المشتــقة العمودية لدالة السطح f. من جهة أخرى؛ المتَّجِهان: التَدَرُّجُ **gradf** وردّ الفعل **N**، متسامتان، لذلك نكتب

$$\mathbf{N} = \lambda\, \mathbf{grad}\, f \qquad 6.4$$

حيث λ هو مضروب لاجرانج Lagrange’s Multiplier للقيد الذي يمكن أن يكون دالةً زمنية. كما نكتب المعادلة الأخيرة بعد تحليلها بأيٍ من الصيغتين

$$\mathbf{N} = N_x\boldsymbol{i} + N_y\boldsymbol{j} + N_z\boldsymbol{k} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 7.4$$

أو

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\ N_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\ N_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \qquad 8.4$$

وباستبدال مركبات رد الفعل **N** تؤول المعادلة 4.4 إلى الشكل الجديد

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad 9.4 \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

وبائتلاف هذه المعادلات مع معادلة القيد 3.4، نحصل على أربع معادلاتٍ بأربعة مجاهيل هي الإحداثيات x، y و z، ومضروب لاجرانج λ فقط. إن حلّ المعادلات 9.4 ، يتكون بِــ (إجراء) تكاملها مرتين، لنحصل في النهاية على معادلة حركة الجسيم ومضروب لاجرانج الذي يمكن أن يكون دالةً زمنية. هذه المعادلات 9.4، التي تعرف حركة الجسيم المقيدة تسمى **معادلات لاجرانج من النوع الأول** Lagrange’s Equations of the First Kind**.** أما ردّ الفعل **N**، فتُحَدّد قيمته من المعادلة

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = |\lambda\, \mathbf{grad}\, f|$$

$$N = |\lambda|\sqrt{\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}^2} \qquad 10.4$$

سندرس حركة الجسيم على سطحٍ ثنائيّ الجانب[2] bilateral، وإسكليرونوميّ. هنا يكون مُتَّجِهُ الســـرجهة $\boldsymbol{v}$ منطبقاً على المســـتوى المماس على السطح. وحيث إن التَدَرُّجَ عموديٌ على الســـطح، وبالتالي عموديٌ على المســـتوى المماس المذكور، $\mathbf{grad}f \perp \boldsymbol{v}$، لهذا فحاصل الضرب القياسي للمتجهين المذكورين أعلاه يساوي صفراً. أي أن

$$\boldsymbol{v}\cdot \mathbf{grad}\, f = 0 \qquad 11.4$$

وبحساب المشتقة الأولى لحاصل الضرب القياسي

---

[2] سطحٌ ثنائيُ الجانب: سطحٌ متَّصل ومرتبط بالجسم المتحرك ارتباطاً وثيقاً، يلاصقه ولا ينفصل عنه. لمزيد من المعلومات، انظر **الباب العاشر**، ص 280.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{grad}\,f + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\,f = 0 \qquad 12.4$$

وبضرب طرفي المعادلـــة 12.4 في الكتلة m، ثم استبدال ma الناتجة بقيمتها من المعادلة 1.4 للقيد الأملس يكون

$$(\mathbf{F}+\mathbf{N})\cdot\mathbf{grad}\,f + m\,\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\,f = 0 \qquad 13.4$$

كما أن استبدال رد الفعل **N** بقيمته من المعادلة 6.4، ينتج أن مضروب لاجرانج يتحدد بالعلاقة

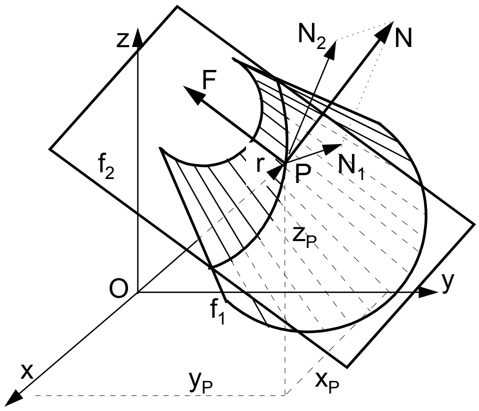
$$\lambda = -\frac{1}{|\mathbf{grad}\,f|^2}\left[\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\,f + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\,f\right] \qquad 14.4$$

وليحسب بعد ذلك رد الفعل من المعادلة 6.4 بعد التعويض عن قيمة λ.

2.3.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً أملس

عند حركة الجسيم على منحنىً أملس وثابت، **شـــكل 3.4**، فإن معادلة هذا المنحنى تعرَّف بتقاطع سطحين(قيدين) أملسين، معادلة كلٍّ منهما شبيهةٌ بالمعادلة 3.4 مع إضافة الرمزين 1 و2، أي أن $f_1(x,y,z)=0$ و $f_2(x,y,z) = 0$. يتكون ردُّ فعل المنحنى على الجسيم المتحرك من ردي فعل السطحين 1 و 2، وهما محدّدان بالمعادلة

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \qquad 15.4$$



شـــكل 3.4

حيث $\mathbf{N}_1$ رد فعل السطح الأول على الجسيم المتحرك ، بينما $\mathbf{N}_2$ رد فعل السطح الثاني على الجسيم نفسه. وباستبدال رد الفعل **N** في المعادلة 1.4 من المعادلة 15.4 ينتج

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \qquad 16.4$$

وقياساً على المعادلة 6.4 نحصل على المعادلة الاتجاهية التالية:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda_1\,\mathbf{grad}\,f_1 + \lambda_2\,\mathbf{grad}\,f_2 \qquad 17.4$$

أو المعادلات القياسية، مساقط المعادلة 17.4 على المحاور الديكارتية

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad 1.17.4\\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned}$$

هذه المعادلات 1.17.4 بالإضافة إلى معادلتي القيدين $f_1(x,y,z) = 0$ و $f_2(x,y,z) = 0$ تكوِّن مجموعةً من خمس معادلاتٍ ذات خمسة مجاهيل، الإحداثيات الثلاثة x، y و z، ومضروبي لاجرانج λ_1 و λ_2. إن حلّ المعادلات 1.17.4 بإجراء تكاملها مرتين ثُمَّ إيجاد ثوابت التكامل، يُعرِّف معادلة حركة الجسيم المتحرك على المنحنى الأملس والثابت. وقياساً على المعادلة 10.4 نـــجـــد قيمتي ردّي الفعل N_1 و N_2

$$N_1 = |\lambda_1 \ \mathbf{grad}\ f_1| = |\lambda_1| \sqrt{\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}^2} \qquad 1.18.4$$

$$N_2 = |\lambda_2 \ \mathbf{grad}\ f_2| = |\lambda_2| \sqrt{\left\{\frac{\partial f_2}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_2}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_2}{\partial z}\right\}^2} \qquad 2.18.4$$

كما نجد، قياساً على المعادلة 14.4، قيمتي مضروبي لاجرانج λ_1 و λ_2

$$\lambda_1 = -\frac{1}{|\mathbf{grad}\, f_1|^2}\,[\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\, f_1 \ + \ \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\, f_1] \qquad 1.19.4$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{|\mathbf{grad}\, f_2|^2}\,[\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\, f_2 \ + \ \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\, f_2] \qquad 2.19.4$$

4.4 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد في الإحداثيات الطبيعية

1.4.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً أملس

إذا أسقطنا المعادلة الاتجاهية 1.4، بعد استبدال **R = N**، على الإحداثيات الطبيعية Ptnb، **شـكل 4.4**، نحصل على

$$\begin{aligned} m\,a_t &= F_t \\ ma_n &= F_n + N_n \\ ma_b &= F_b + N_b \end{aligned} \qquad 20.4$$

ولأن الحركة تتم في مستوى التلامس، فإن $\mathbf{a_b = 0}$ و $\mathbf{a = a_n + a_t}$، لذلك نكتب المعادلات 20.4 استناداً إلى المعادلات 48.2 بالصيغة الجديدة

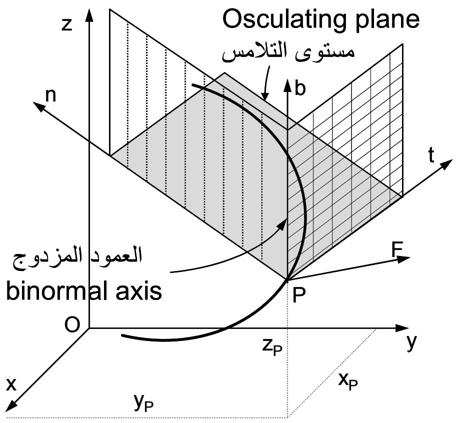
$$m\,a_t = m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t \qquad 1.21.4$$

$$m\,a_n = m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 2.21.4$$

اللتان تدعيان **بمعادلات أويلر** Euler's Equations لحركة الجسيم على منحنى أملس. إن أفضلية معادلات أويلر لحركة الجسيم المقيدة على معادلات لاجرانج من النوع الأول هي الإمكانية المتوفرة والمباشرة للمعادلات الأولى لإيجاد ردِّ الفعل الديناميكي، وحركة الجسيم في الوقت نفسه على عكس معادلات لاجرانج. ولذلك فتكامل المعادلة 1.21.4 مرتين يعطي الحركة

$$S = S_o + \int_0^t [\int_0^t F_t\, dt + v_o]\, dt \qquad 22.4$$

بينما تعرف المعادلتين الثانية والثالثة من المعادلات 20.4 ردَّ الفعل الديناميكي الذي يعتمد بالإضافة على نوعية القيد والقوى المؤثرة على الحركة ممثلةً في السرعة وتغيرها. ولأن الحركة تتم في مستوى التلامس، $\mathbf{a_b = 0}$ فإن $F_b = 0$ وتبعاً لذلك ينتج من المعادلة الثالثة أن ردَّ الفعل $N_b = 0$. وتؤول تبعاً لذلك المعادلات 20.4 للشكل الجديد



شـــكل 4.4

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t \qquad 23.4$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 24.4$$

1.4.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً خشن

في هذه الحالة يصبح رد الفعل **R** مكوناً من المركبتين العمودية **N** والمماسية **F_μ**. والأخيرة هي قوة الاحتكاك الانزلاقية $F_\mu = \mu N$. إن تعويض قوة الاحتكاك الانزلاقية كقوة أخرى للقوى المؤثرة في الجهة اليمنى في المعادلة 1.4 يعرف المعادلة الاتجاهية لحركة الجسيم المقيد بمنحنىً خشن

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mu\,\mathbf{N} \qquad 25.4$$

أو ثلاث معادلات قياسية ناتجة من إسقاطها على المحاور الطبيعية الثلاثة

$$m\,a_t = m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t - \mu N \qquad 26.4$$

$$m\,a_n = m\frac{v^2}{R} = F_n + N \qquad 27.4$$

$$0 = F_b + N_b \qquad 28.4$$

وكما ورد أعلاه بالنسبة للحركة المقيدة بمنحنىً أملس تؤول المعادلات 26.4-28.4 بعد إلغاء الأخيرة للشكل الجديد التالي

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t - \mu N \qquad 29.4$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 30.4$$

5.4 مبدأ دالمبير للجسيم المقيد [3]

إذا افترضنا أن المتَّجِه الرئيسي لمحصلة القوى المؤثرة على الجسيم المقيد **F**، $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ ورد فعل القيد على الجسيم **N**، فإن المعادلة الاتجاهية لحركة هذا الجسيم المقيد تأخذ شكل المعادلة 1.4. وإذا طرحنا من طرفي المعادلة المذكورة الكمية المتَّجِهة ma فإننا نحصل على المعادلة

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} - m\,\mathbf{a} = 0 \qquad 31.4$$

---

[3] من الجدير ذكره أن **أويلر** L. Euler أرسل عام 1740 إلى أكاديمية العلوم في مدينة بطرسبرغ بحثاً لا يختلف عن مبدأ **دالمبير**. وقد صاغ الأخير مبدءً، سُمِّي فيما بعد باسمه وإن كان الأصح أن يُسمى **بمبدأ دالمبير - أويلر**.

وإذا عرّفنا سالب الكمية المتَّجِهة المذكورة أعلاه ma-، بقوة قصور الجسيم $\mathbf{F}_{in}= -m\mathbf{a}$، المساوية لحاصل ضرب كتلته ومتَّجِه تسارعه، مع تحديد اتجاهها بعكس اتجاه التسارع، وحيث تكون وَحَدَاتها مكافئةً لوحدات وأبعاد القوة، فإن المعادلة الأخيرة تؤول إلى

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{in} = 0 \qquad 32.4$$

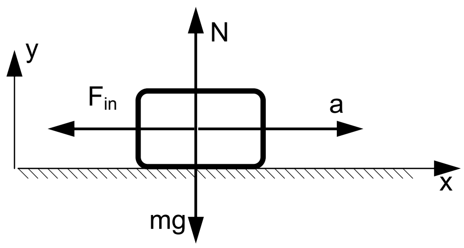
والتي تعرف **بمبدأ دالمبير للجسيم المقيد: إذا أضفنا إلى القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك F، وقوة رد فعل القيد N، قوةَ قصوره $\mathbf{F}_{in}$ فإن مجموع هذه القوى الهندسي (الاتجاهي) يكون صفراً**. وبصورةٍ مكافئة **المجموع الهندسي للقوى المؤثرة على الجسيم المتحرك وقوة رد فعل قيده وقوة قصوره يساوي صفراً**. إن العبارة السابقة **مجموع هذه القوى الهندسي يكون صفراً لا تكافئ المفهوم الاستاتيكي لاتزان جسيمٍ يقع تحت تأثير تلك القوى**. إذ يكون الجسيم لحظتها مستقراً لا حراك فيه. أمَّا بالنسبة للجسيم المتحرك فتعني العبارة نفسها أن الجسيم يبقى متحركاً طالما بقي تأثير قوة القصور. ولذلك ؛ تُضاف قوة القصور إلى القوى المؤثرة الأخرى على الجسيم كقوةٍ وهميةٍ ولِتُشَكِّل مجموعةَ قوىً متزنةٍ بدون أن يكون هذا الجسيم المتحرك مستقراً فعلا.

وتكمن أهمية مبدأ دالمبير في أن إضافة قوة القصور إلى القوى المؤثرة الأخرى على الجسيم هو فقط من أجل تكوين معادلاتٍ ديناميكيةٍ شبيهةٍ بمعادلات الاتزان الإستاتيكية، ولتكون أكثر بساطة من معادلات الديناميكا الأساسية. ولتوضيح كيفية إضافة قوة القصور إلى الجسيم سنأخذ المثالين التاليين:

الحركة المستقيمة والمتسارعة على سطح أفقي أملس

في هذه الحالة، **شـكل 5.4**، فإن القوى المؤثرة على الجســم هي قوة وزنه **mg** للأســفل ورد فعل السطح الأملس **N** عمودي على السطح وللأعلى. ولأن متَّجِه تســارع الجسم **a** لليمين مطابقٌ لحركة الجســم، فإن خطَّ عمل قوة القصور هو نفس خط عمل التسارع لكن بالاتجاه العكسي؛ لليســار .

$$\mathbf{F}_{in} = -m\,\mathbf{a} \qquad 33.4$$

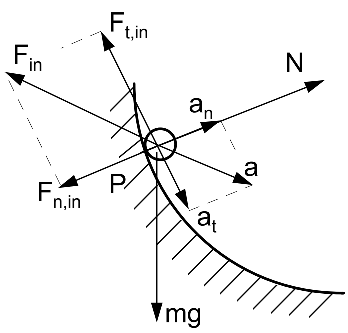


شـكل 5.4

الحركة المنحنية والمتسارعة

يؤثر على الجسم المتحرك على المنحدر القوسي الأملس، شكل 6.4، قوة الوزن **mg** كقوة خارجية وحيدة، أما قوة رد الفعل **N** من السطح الأملس فهي متعامدة مع المماس على السطح المذكور. يتكون متَّجِه التسارع **a** من مركبتين: العمودية $\mathbf{a}_n$، باتجاه مركز المنحدر والمماسية $\mathbf{a}_t$ باتجاه الحركة. لهذا تكافئ قوة القصور $\mathbf{F}_{in}$ المركبتين العمودية $\mathbf{F}_{n,in}$؛ موازيةً عكسياً مع خط عمل التسارع العمودي، والمركبة المماسية $\mathbf{F}_{t,in}$؛ موازيةً عكسياً مع خط عمل التسارع المماسي أيضاً. أي

$$\mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_{n,in} + \mathbf{F}_{t,in} = -m\,\mathbf{a}_n - m\mathbf{a}_t \qquad 34.4$$



شـكل 6.4

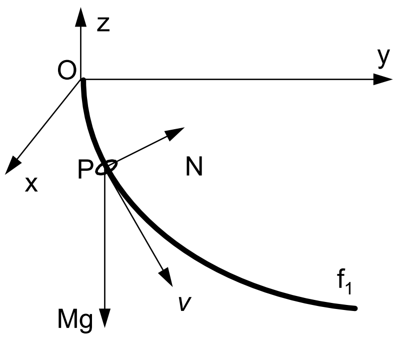
6.4 حـــل المسائل

يقوم حلُّ أغلب مسائل الحركة المقيدة على إيجاد رد فعل القيد على الجسيم المتحرك، إذ يتمُّ ذلك بمسارين: الأول، يقوم على استخدام الإحداثيات الديكارتية، معادلات 9.4 للسطح الأملس ومعادلات 17.4 للمنحنى الأملس وذلك من أجل حساب قيمة مضروب لاجرانج λ، وفْقَاً للمعادلة 6.4 ومن ثَمَّ حساب ردِّ الفعل كحاصل ضرب تَدَرُّجَ القيد في هذا المضروب. أما المسار الثاني فيشمل استخدام الإحداثيات الطبيعية، والمعادلات 23.4 - 30.4.

كما يمكن حساب ردِّ الفعل باستخدام مبدأ دالمبير، معادلة 31.4. ولهذا السبب يجب تحديد وضع الجسيم في موضع اعتباطي، وليس في موضع خاص. أما إيجاد سرعة الجسيم في تلك اللحظة فيتم بمعرفة التغير في طاقة حركته، بما يعني ذلك من تداخل مع الباب الخامس من هذا الكتاب. ويتضح من حل المسائل أن رد الفعل الديناميكي يختلف اختلافاً جذرياً عن رد الفعل الاستاتيكي. إذ يعتمد الأول بالإضافة الى القوى المؤثرة وشكل القيد على سرعة الجسم اللحظية.

أســـئـــلـــة مـــحـــلـــولـــة

سؤال م 1.4



شـــكل م 1.4

تتحرك حلقةٌ، كتلتها M، على سلكٍ معدني ثابتٍ وأملس، ثني ليرسم معادلة القطع المكافئ $y = z^2$، وذلك تحت تأثير قوة وزنها. أوجد رد فعل السلك على الحلقة في موضعٍ اعتباطي، إذا علمنا أن الحلقة تحركت في اللحظة الابتدائية $t_0 = 0$ من السكون، انطلاقاً من الموضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o = 0$ فما قيمة ردِّ الفعل في الموقع $P_1(0, -,-2)$؟

الـــحـــل

تحركِ الحلقة في المستوى العمودي Oyz، يتبع معادلة القطع المكافئ

$$f_1(x, y, z) = y - z^2 = 0$$

كما أنَّ هناك تحديداً ضمنياً للحركة، وهو أن قيمة الانحراف عن المســـتوى العمودي تساوي الصفر. أي أن $f_2(x, y, z) = x = 0$. نحسب التفاضلات الجزيئية لمعادلتي القيدين f_1 و f_2 بدلالة الإحداثيات الديكارتية

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=-2z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=0$$

وحيث إن القوة الخارجية المؤثرة على الحلقة هي قوة الوزن فقط، $\mathbf{F} = - M g \boldsymbol{k}$، فإن معادلات 1.17.4 لحركة الحلقة

$$M\ddot{x}=\lambda_2$$

$$M\ddot{y}=+\lambda_1 \qquad 1$$

$$M\ddot{z}=-Mg-2\lambda_1 \boldsymbol{z} \qquad 2$$

من جهةٍ أخرى؛ تتم الحركة في المستوى العمودي فقط، ليعني رياضياً أن $\dot{x}=\ddot{x}=0$ ، وبالتالي فمضروب لاجرانج الثاني يساوي الصفر $\lambda_2=0$. وباستبدال λ_1 من المعادلة 1 وتعويضه في المعادلة 2 ينتج أن

$$\ddot{z}+2\ddot{y}z=-g \qquad 3$$

نفاضل معادلة القيد الأولى، المنحنى $y = z^2$ مرتين

$$\dot{y}=2z\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}=2\dot{z}^2+2z\ddot{z} \qquad 4$$

ثُمَّ نعوِّض المعادلة 4 في المعادلة 3 نجد أن

$$\ddot{z}[1+4z^2]+4\dot{z}^2z=-g \qquad 5$$

وبمعرفة أن $\ddot{z}=\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz}$ ، فإن استبدال ذلك في المعادلة 5 ينتج بعد ترتيبها أن

$$\dot{z}d\dot{z}[1+4z^2]+[4\dot{z}^2z+g]dz=0 \qquad 6$$

حل هذه المعادلة التفاضلية يكون بالشكل التالي

$$\dot{z}^2[1+4z^2]+2zg=C \qquad 7$$

حيث C ثابت، تتحدد قيمته من الشروط الابتدائية

$$\mathbf{r}_o=0\ ,\ x=y=z=0\ \ \&\ \ \dot{\mathbf{r}}_o=0, \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0 \quad \Rightarrow \quad C=0$$

وتبعاً لذلك، نكتب المعادلة 7 بالشكل الجديد التالي

$$\dot{z}^2=-\frac{2z}{[1+4z^2]}g \qquad 8$$

نفاضل طرفي المعادلة 8 زمنياً، ثُمَّ نحذف $2\dot{z}$ من الطرفين ينتج أن

$$2\ddot{z}\dot{z}=-2g\frac{\dot{z}[1+4z^2]-8z^2\dot{z}}{[1+4z^2]^2} \Rightarrow \ddot{z}=\frac{[4z^2-1]}{[2z^2+1]^2}g \qquad 9$$

نحدد الآن قيمة λ_1 من المعادلة 2 بعد استبدال قيمة $\ddot{z}$ فيها من المعادلة 9 فينتج

$$\lambda_1=-2Mg\frac{[4z^2+3]}{[4z^2+1]^2} \qquad 10$$

أمّا ردود الأفعال $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$، فيتحددان من المعادلتين 18.4. ولأنَّ $\lambda_2=0$، $\mathbf{N}_2=0$، بينما

$$\mathbf{N}_1=\lambda_1\ \mathbf{grad}\ f_1=\lambda_1\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\boldsymbol{k}\right\}$$

$$\mathbf{N}_1=-2Mgz\frac{[4z^2+3]}{[4z^2+1]^2}(\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}) \qquad 11$$

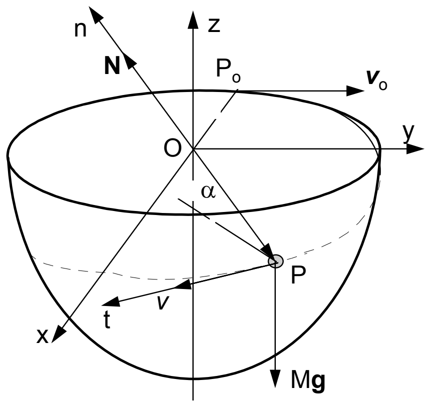
أخيراً، نحسب ردُّ الفعل في الموقع $P_1(0, -, -2)$، حيث أنّ $y = 4$ و $\mathbf{N}_2=0$

$$\mathbf{N}_1=-2Mg\times-2\frac{[4\times2^2+3]}{[4\times2^2+1]^2}(\boldsymbol{j}-2\times-2\boldsymbol{k})$$

$$\mathbf{N}_1=1.052\ Mg\ (\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}) \qquad 12$$

سؤال م 2.4

تتحرك كرةٌ صغيرةٌ، كتلتها M، داخل نصف كرةٍ مجوفةٍ وملساء، نصف قطرها r وبحيث تكون حافتها العلوية أفقية. أوجد رد فعل السطح على الكرة المتحركة في موضعٍ اعتباطي. إذا كانت السرجهة الابتدائية $\boldsymbol{v}_o = v_o\,\boldsymbol{j}$.



شكل م 2.4

الحـــل

من معادلة السطح الكروي – القيد

$$f(x, y, z) = r^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

نجد أن

$$\mathbf{grad} f = -(2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k}) \qquad 1$$

$$\mathbf{grad}\, f = 2\,\mathbf{r} \;\;\&\;\; |\mathbf{grad}\, f|^2 = |2\,\mathbf{r}|^2 = 4\,r^2 \qquad 2$$

حيث يمثل r بعد الكرة أثناء حركتها عن المركز O. وبتعويض المعادلة 2 في المعادلة 14.4 نجد أن مضروب لاجرانج

$$\lambda = -\frac{1}{4r^2}\left[-Mg\boldsymbol{k}\cdot -(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}) + M\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}(-2\mathbf{r})\right]$$

$$\lambda = -\frac{M}{4r^2}\left[-g\boldsymbol{k}\cdot -(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}) + \right.$$

$$\left.[-(2\dot{x}\,\boldsymbol{i} + 2\dot{y}\,\boldsymbol{j} + 2\dot{z}\,\boldsymbol{k})\cdot\frac{d}{dt}[-(2x\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} + 2z\,\boldsymbol{k})]]\right]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2r^2}[Mgz + Mv^2] \qquad 3$$

وبناءً على معادلة 10.4، فإن قيمة رد الفعل

$$N = |\lambda\,\mathbf{grad}\, f| = \frac{M}{r}[gz + v^2] \qquad 4$$

كما يمكن حل السؤال نفسه مباشرةً بإسقاط معادلة الحركة 4.1 على المحور العمودي Pn

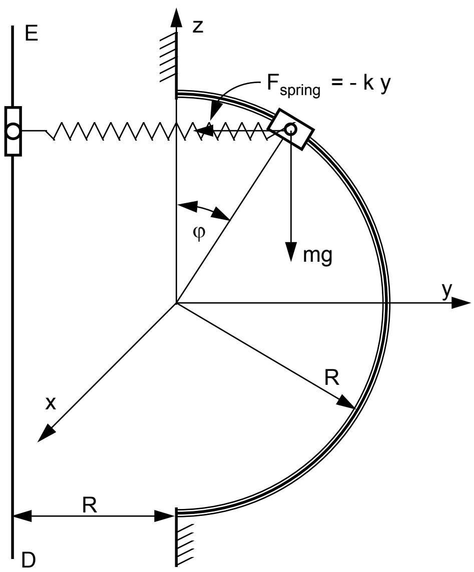
$$M\,a_n = N - M\,g\cos\alpha \qquad 5$$

حيث أن α زاوية الانحراف لمُتَّجِهُ موضع الكرة الصغيرة عن المحور العمودي Oz، $\cos\alpha = \frac{z}{r}$. أما التسارع العمودي فيكون $a_n = \frac{v^2}{r}$. إن تعويض ذلك في المعادلة 5 يبين بدون عناء أن ردَّ الفعل N يخطع للمعادلة 4.

سـؤال م 3.4

تتحرك حلقةٌ، كتلتها m، على قوسٍ دائري أملس وثابت، نصف قطره R. ويرتبط بالحلقة زنبركٌ، معامل مرونته k، ينزلق طرفه الأخر على دليلٍ رأسي ED بحيث يبقى الزنبرك في وضعٍ أفقيٍ دائماً. أوجد قيمة رد فعل القوس على الحلقة وفي موضعٍ اعتباطي. إذا كان طول الزنبرك الطبيعي R، وذلك للشروط الابتدائية التالية

$t = t_o = 0\ ,\ \varphi_o = \varphi = 0,\ \ v_o = 0\ \&\ \ d\varphi_o/dt = 0$



شـكل م 3.4

الحـــل

معادلات السلك

$f_1(x,y,z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0\ ,$

$f_2(x,y,z) = x = 0$

نحسب التفاضلات الجزيئية

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0\ \ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2z \qquad 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1\ \ ,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \qquad 2$$

والمتَّجه الرئيسي للقوى الخارجية

$$\mathbf{F} = -mg\,\boldsymbol{k} - ky\,\boldsymbol{j} \qquad 3$$

وباستبدال المعادلات 1 ، 2 و 3 في المعادلة 1.17.4 يكون

$$m\ddot{x} = \lambda_2 \qquad 4$$

$$m\ddot{y} = -ky + 2l_1 y \qquad 5$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda_1 z \qquad 6$$

ولأن $x=\dot{x}=\ddot{x}=0$ فإن مضروب لاجرانج الثاني

$$\lambda_2 = 0 \qquad 7$$

ولذلك يُحل هذا السؤال بمجموعةٍ من التحويلات. فضرب المعادلة 5 في y والمعادلة 6 في z ثمَّ جمع المعادلتين الناتجتين يكون

$$m(y\ddot{y} + z\ddot{z}) = -ky^2 + 2\lambda_1(y^2 + z^2) - mgz$$

أو

$$m(y\ddot{y} + z\ddot{z}) = -ky^2 - mgz + 2\lambda_1 R^2 \qquad 8$$

بينما ضرب المعادلة 5 في z والمعادلة 6 في y ثمَّ طرح المعادلة الثانية من الأولى يعطي

$$m(\ddot{y}z - \ddot{z}y) = -kyz + mgy + 2\lambda_1 yz - 2\lambda_1 y\boldsymbol{z}$$

أو بعد ترتيبهما

$$m(\ddot{y}z-\ddot{z}y)=-kyz+mgz \qquad 9$$

ننتقل الآن من الإحداثيات الدّيكارتية إلى الإحداثيات الإسطوانية القطبية، **شكل** م 3.4، فنفترض أن

$$x = x \ , \ y = R\sin\varphi \ , \ z = R\cos\varphi \qquad 10$$

ونحسب التفاضلات الجزيئية الأولى والثانية للإحداثيين y و z

$$\dot{y}=R\cos\varphi\,\dot{\varphi},\ \ddot{y}=R\cos\varphi\,\ddot{\varphi}-R\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 \qquad 11$$

$$\dot{z}=-R\sin\varphi\,\dot{\varphi}\ \ ,\ddot{z}=-R\sin\varphi\,\ddot{\varphi}-R\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 \qquad 12$$

وبتعويض قيم $\ddot{y}$ من المعادلة 11 و $\ddot{z}$ من المعادلة 12 في المعادلتين 8 و9 نحصل بعد جملةٍ من الاختصارات على المعادلتين التاليتين:

$$m\dot{\varphi}^2=k\sin^2\varphi-2\lambda_1+m\frac{g}{R}\cos\varphi \qquad 13$$

$$\ddot{\varphi}=-\frac{k}{2m}\sin 2\varphi+\frac{g}{R}\sin\varphi \qquad 14$$

وإذا ما استبدلنا $\ddot{\varphi}=\dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ في المعادلة 14 نجد أن

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=-\frac{k}{2m}\sin 2\varphi d\varphi+\frac{g}{R}\sin\varphi d\varphi \qquad 15$$

أو بعد إجراء التكامل يكون

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{k}{4m}\cos 2\varphi-\frac{g}{R}\cos\varphi+C \qquad 16$$

حيث C ثابتٌ، تتحد قيمته من الشروط الابتدائية للحركة

$$t = t_o = 0\ ,\ \varphi_o = \varphi = 0,\ (d\varphi / dt)_o = 0$$

$$C=\frac{g}{R}-\frac{k}{4m} \qquad 17$$

وتبعاً لذلك تؤول المعادلة 16 إلى الشكل الجديد التالي

$$m\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{k}{4}\left[\cos 2\varphi-1\right]-\frac{mg}{R}\left[\cos\varphi-1\right] \qquad 18$$

إذا استبدلنا البديهية

$$\cos 2\varphi - 1 = -2\sin^2\varphi$$

في المعادلة الأخيرة، فإن ترتيبها من جديد يعطي الشكل التالي

$$m\dot{\varphi}^2=-k\sin^2\varphi-2\frac{mg}{R}\left[\cos\varphi-1\right] \qquad 19$$

وبمساواة المعادلة 13 مع المعادلة 19 ينتج أن

$$k\sin^2\varphi-2\lambda_1+m\frac{g}{R}\cos\varphi=-k\sin^2\varphi-2\frac{mg}{R}\left[\cos\varphi-1\right]$$

أو بدلالة مضروب لاجرانج الأول

$$\lambda_1 = k\sin^2\varphi + \frac{mg}{R}\left[\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right] \qquad 20$$

وقياساً على المعادلة 1.18.4 نحسب رد الفعل N_1

$$N_1 = |\lambda_1\, \mathbf{grad}\, f_1| = \left|\left\{k \sin^2\varphi + \frac{mg}{R}\left[\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right]\right\}\left\{2\,y\,\boldsymbol{j} + 2\,z\,\boldsymbol{k}\right\}\right|$$

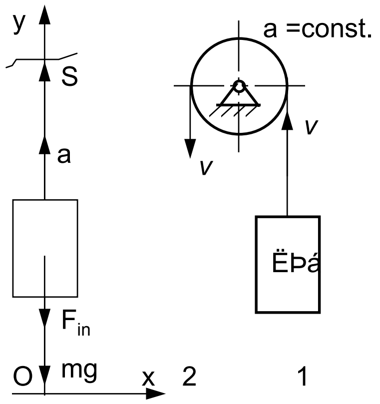
$$N_1 = \left|\lambda_1\, \mathbf{grad} f_1\right| = 2\,R\,k\,\sin^2\varphi + 3\,mg\cos\varphi - 2\,mg \qquad 21$$

ســؤال م 4.4

يُرفعُ ثقلٌ، كتلته m بواسطة حبلٍ عديم الوزن والاستطالة ويلتف حول بكرةٍ بتسارعٍ ثابت. ما الشد في الحبل؟

الــحــل

نحرر الثقل من قيده، الحبل، بقطعه واستبدال تأثيره بقوة الشد في الحبل **S**، رسم 2. نحدد القوى الخارجية المؤثرة على الثقل أثناء حركته وهي قوة الوزن **mg** للأسفل. ولأن حركة الثقل متسارعةٌ للأعلى (أنظر المتجه **a**)، نضيف قوة القصور $\mathbf{F}_{in} = -\,m\mathbf{a}$ للأسفل. المجموع الإتجاهي للقوى الثلاث، قوة الوزن **mg** وقوة القصور $\mathbf{F}_{in} = -\,m\mathbf{a}$ وقوة الشد في الحبل **S** يساوي صفراً. ورياضياً يكون



شـكل م 4.4

$$\mathbf{F}_{in} + m\mathbf{g} + \mathbf{S} = 0 \qquad 1$$

وبإسقاط المعادلة 1 على المحور Oy يكون

$$-\,F_{in} - mg + S = 0 \qquad 2$$

أو بدلالة الشد في الحبل

$$S = F_{in} + mg$$

$$S = m\,(\,a + g\,) \qquad 3$$

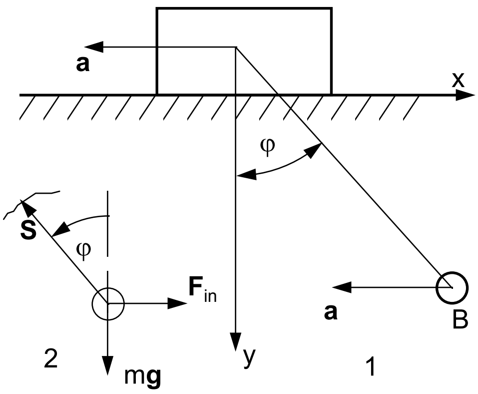
أي أن الشد في الحبل يعتمد على تسارع الثقل وسيزداد إذا ما ازداد هذا التسارع.

تـنـبـيـه: هل تبقى العلاقة 3 صحيحةً في حالة تحرك الثقل للأعلى بتباطؤٍ ثابت؟

ســؤال م 5.4

يتحرك الثقل B المربوط بخيطٍ عديم الوزن والاستطالة أفقياً عندما يتحرك صندوقٌ يحمله على سطحٍ أفقي، بحيث يصنع الثقل والخيط زاويةً ثابتةً مع الرأسي مقدارها φ. أوجد الشد في الخيط وتسارع الثقل.

الــحــل



شـــكل م 5.4

نحرر الثقل من القيد - الخيط مستبدلين ذلك بقوة الشد **S**، رسم **2**. يؤثر على الثقل في الوضع الاعتباطي قوة وزنه **mg** للأسفل. ونضيف قوة قصوره $\mathbf{F}_{in}$ لليمين مضادةً لاتّجاه التسارع. المجموع الاتجاهي للقوى الثلاث، قوة الوزن وقوة القصور $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$ وقوة الشد في الحبل يساوي صفراً. أو رياضياً يكون

$$\mathbf{F}_{in} + m\mathbf{g} + \mathbf{S} = 0 \qquad 1$$

وبإسقاط المعادلة 1 على المحورين Ox و Oy يكون

F_{in} - S sin φ = 0 2

mg - S cos φ = 0 3

وباستبدال F_{in} = ma في المعادلة 2 و3 يكون

m a = S sin φ = 0 4

ومن المعادلات 3 و 4 نجد أن كلاً من التسارع والشد في الخيط

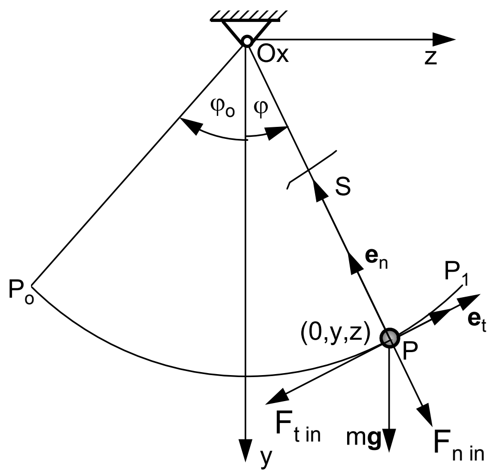
a = g tan φ 5

S = mg /cos φ 6

سؤال م 6.4

إذا درسنا حركة الثقل P لبندول بسيط Simple Pendulum كتلته نُقَطِيّة mass point، ورمزها m، في موضعٍ اعتباطي، عندما يصنع الخيط الذي طوله R، الزاوية φ مع الاتجاه الرأسي، فما الشد في الخيط وما زمن دورة البندول؟ يتحرك الثقل من الموضع P_o المحدد بالزاويةφ_o التي يصنعها الخيط مع الرأسي بسرعةٍ ابتدائية مقدارها v_o.

الحـــــل



شـــكل م 6.4

نكتب المعادلة 32.4 للكتلة P في الموضع المحدد بالزاوية φ

$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{in} = 0$ 1

إذا افترضنا أن الخيط قُطِع واستبدلنا تأثير شده **N** = **S** ، القوة الفاعلة **F** =m**g** وقوة قصوره $\mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_{t\,in} + \mathbf{F}_{n\,in}$، فإن المعادلة 1 تؤول إلى

$m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{F}_{t\,in} + \mathbf{F}_{n\,in} = 0$ 2

وحيث أن $\mathbf{F}_{t\,in} = -\,mR\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_t$ و $\mathbf{F}_{n\,in} = -\,mR\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_n$ نكتب المعادلة 2 بالشكل التالي

$m\mathbf{g} + \mathbf{S} - mR\ddot{\varphi}\,\mathbf{e}_t - mR\dot{\varphi}^2\,\mathbf{e}_n = 0$ 3

أو كمركبتين، مماسية وعمودية

$\mathbf{e}_t$: $-\,m\,g\sin\varphi - R\ddot{\varphi} = 0$ 4

$$\mathbf{e}_n: \quad - m g \cos\varphi + S - m R\dot{\varphi}^2 = S \qquad 5$$

حيث يمكن اختصارهما وترتيبهما بالشكل التالي

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \qquad 6$$

$$m R\dot{\varphi}^2 + m g \cos\varphi = S \qquad 7$$

إذ تمثل المعادلة الأولى 6، المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط كدالة ازاحةٍ زاويـــةٍ φ، بينما تحدد الثانية 7، مقدار الشد في الخيط كدالة إزاحةٍ زاوية φ، ومشتقتها الأولى $\dot{\varphi}$. إن حل هاتين المعادلتين الأخيرتين؛ كمعرفة الزمن الدوري للبندول T والشد في الخيط S، يتطلب معرفة الشروط الابتدائية، التي من السهل استنباطها. فاللحظة الابتدائية $t = t_0 = 0$، يقابلها إزاحةً زاوِّية ابتدائيةٍ $\varphi = \varphi_o$، وسرعة زاوِّية $\dot{\varphi} = \frac{v_o}{R}$. وعلى هذا الأساس؛ وحتى نجد قيمة الشد في الخيط S من المعادلة 34.4، نحسب قيمة $\dot{\varphi}^2$ من المعادلة 6، باعتبار أن $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$، وإجراء التكامل المحدود

$$\int_{\dot{\varphi}_o}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = -\frac{g}{R}\int_{\varphi_o}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_o^2 + 2\frac{g}{R}(\cos\varphi - \cos\varphi_o) \qquad 8$$

وتعويض ذلك في المعادلة 34.4، نجد أن مقدار الشد في الخيط كدالة إزاحةٍ زاوية φ، ومشتقتها الأولى $\dot{\varphi}$

$$S = m R\,\dot{\varphi}_o^2 + m g\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_o) \qquad 9$$

أو كدالة إزاحةٍ زاوية φ والسرعة الابتدائية v_o

$$S = m\frac{v_o^2}{R} + mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_o) \qquad 10$$

نلاحظ أن مقدار الشد في الخيط، يعتمد، بالإضافة إلى الإزاحة الزَّاوِّية التي يرسمها الخيط مع الاتجاه الرأسي على الشروط الابتدائية للحركة ممثلةً في زاوية الانحراف الابتدائية φ_o والسرعة الابتدائية v_o أو السرعة الزاوية الابتدائية $\dot{\varphi}_o$. وحتى نجد حل المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط، سنعيد كتابة المعادلة 6

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0 \qquad 11$$

حيث ω التردد الزاوي frequency،$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$. هذه المعادلة التفاضلية الأخيرة 11، غير خطية، متجانسة من الرتبة الثانية، وذات معاملات ثابتة. ولا يمكن حلها بالدوال العادية لوجود الدالة اللآخطِّية $\sin\varphi$. لنعتبر $\sin\varphi \cong \varphi$، لقيم الزاوية الصغيرة جدا $\varphi << 1[rad]$، عندئذٍ تؤول المعادلة 11 إلى الشكل الأكثر اقتضاباً:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \qquad 12$$

والتي تعتبر معادلة تفاضلية خطِّية، متجانسة، وذات معاملات ثابتة من الرتبة الثانية. ويمكن كتابة حلها العام بأيٍ من الطريقتين:

$$\varphi = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \qquad 13$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان اعتباطيان؛ أو

$$\varphi = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad 14$$

حيث A و α، هما الثابتان الاعتباطيان. وفي التعبير الأخير A يمثل الاتساع amplitude، بينما يكون α ثابت الطور phase angle. وبالرغم من مظهرهما المختلف، فإن المعادلتين الأخيرتين 13و14 متكافئتان، كما وتمثل كلتاهما لمعادلة الحركة 12، أو حتى للمعادلة 6 للإزاحات الزاوِّية الصغيرة. وحتى يعمل الثقل P دورةً كاملةً، من الموقع P_o حتى الموقع P_1، ثمّ رجوعاً إلى P_o، **شكل م 6.4**، يستلزم أن يكون مقدار التغير في زاوية الطور $d\varphi = \varphi - \varphi_o = \omega t = \omega T = 2\pi$. أي أن الزمن الدوري

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad 15$$

نلاحظ من المعادلة 15، أن الزمن الدوري T للبندول البسيط، وللإزاحات الزاويّة الصغيرة، لا يعتمد على كتلة الثقل، بل على كلٍ من طول الخيط وتسارع الجاذبية. وهذه من مميزات الحركة التي تحكمها الجاذبية. ومن العلاقة نفسها 15، يمكن الاستنتاج أن بندولاً ذا طولٍ ثابت، منقولاً من موضعٍ لآخر على الأرض، سوف يُبْدِي تغييراً طفيفاً في دورته نظراً لحدوث تغييرٍ في تسارع الجاذبية الأرضية. وهكذا، فإن البندول البسيط، يُزَوِّدُنا بطريقــةٍ ممتازةٍ لقياس التغيرات في الجاذبية الأرضية من موضعٍ إلى آخر على سطح الأرض.

وحتى نجد الزمن الدوري T للبندول البسيط بدلالة زاوية انحرافه الابتدائية عن الرأسي- زاوية الطور الابتدائية φ_o، نحدد الشروط الابتدائية للحركة على النحو التالي: في اللحظة الابتدائية $t = t_0 = 0$ تكون $\varphi = \varphi_o$، أما السرعة الــزاويــة الابتدائية فنجعلها تساوي صفراً (يتحرك من السكون) $\dot{\varphi}_o = 0$. وبناءً على ما ورد، فإن حل المعادلة 6 بدلالة المشتقة الأولى للزاوية $\dot{\varphi}$، أو مباشرةً من المعادلة 8، يكون

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\varphi - \cos\varphi_o)} \qquad 16$$

حيث تمثل الإشارة الموجبة القيمة التصاعدية للزاوية φ، والإشارة السالبة القيمة التنازلية للزاوية نفسها. وعلى هذا الأساس، فحل المعادلة 41.4 بدلالة dt يكون

$$dt = \pm\sqrt{\frac{R}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}} \qquad 17$$

وبعد إجراء التكامل، فإن الزمن الدوري T يساوي زمن الذهاب وزمن الإياب. أو رياضياً

$$T = \int_0^T dt = -\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}} + \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}} \qquad 18$$

حيث يمثل زمن الذهاب التكامل الأول وزمن الإياب التكامل الثاني. الزمن الدوري T

$$T = 2\sqrt{\frac{2R}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_o}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \qquad 19$$

وباستبدال المتغير الجديد $\sin\phi$ (داخل الجذر وفي المقام) بآخر

$$\sin\phi = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_o}{2}} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{2\sin\frac{\varphi_o}{2}\cos\phi}{\cos\frac{\varphi}{2}}d\phi$$

فإن الزمن الدوري T ومعادلة 19 يؤولان إلى الشكل المقتضب التالي:

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_o}{2}\sin^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\,\mathrm{INT} \qquad 20$$

وهذا التكاملINT، معروف في الرياضيات بتكامل القطع الناقص من النوع الأول، وهو محلول ضمن الدوال الخاصة

$$INT = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_o}{2}\sin^2\phi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_o}{2}\sin^2\phi + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin^2\frac{\varphi_o}{2}\sin^4\phi + \cdots\cdots] \, d\phi$$

وبعد إجراء التكامل وتعويضه نجد أن الزمن الدوري

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_o}{2} + \cdots\cdots] \qquad 21$$

وللزوايا الصغيرة يكون $\sin\frac{\varphi_o}{2} = \frac{\varphi_o}{2}$، فتكتب المعادلة الأخيرة بالشكل الجديد

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,[1 + \frac{\varphi_o^2}{16} + \cdots\cdots] \qquad 22$$

المعادلتان 21 و22 تعرفان الزمن الدوري للبندول البسيط بدلالة $\sin\varphi_o$ أوφ_o، كأقصى جيب زاوي أو انحرافٍ زاويٍ يصله الثقل وخيطه عن الاتجاه الرأسي. وهما تثبتان أن زمن دورة البندول البسيط يعتمد على طول الخيط وتسارع الجاذبية، بالإضافة إلى اعتماده على الشروط الابتدائية للحركة. لذا، ينتج بعض الأخطاء المعينة في الساعات البندولية. وتبلغ قيمة هذا الفرق حسب المعادلتين 21 و22، ولزوايا الانحراف الصغيرة $|\varphi_o| = 5°$ المقدار 4.76×10^{-4} حيث يتلاشى كلٌ من الفرقين $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_o}{2}$ و $\frac{\varphi_o^2}{16}$، في المعادلتين المذكورتين أعلاه. أما بالنسبة لزوايا الانحراف الأكبر، فتبلغ قيمة هذين الفرقين، وللزاوية $|\varphi_o| = 45°$ المقداران 3.66×10^{-4} و 3.9×10^{-4} بالترتيب.

[4] أنظر مثلاً

I. S. Sokolnikoff, R. M. Redheffer : *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw - Hill, New York ,1958. p49.