الباب الثالث

هنري كيسنجر:

.... لقد كان لنا ثورتنا النيوتنية، أما هم(الشرقيون) فلم يكن لهم ذلك.

إدوارد سعيد، **الإستشراق**، بيروت: مؤسسة الأبحاث العربية، 1995، ص 77.

قوانين الديناميكا LAWS OF DYNAMICS

1.3 المفاهيم الأساسية

الديناميكا هي قسم الميكانيكا النظرية الذي يبحث في قوانين حركة الأجسام تحت تأثير القوى. لقد عرفت القوة في الاستاتيكا بأنها ثابتةٌ في المقدار والاتجاه، وهي بالتالي مقدار التأثير الميكانيكي بين الأجسام المادية. أما في الكَيْنَمَاتِيكا فلم تُذكر القوة أبداً، إذ درست حركة الجسم من وجهة النظر الهندسية البحتة. غير أن قوىً متغيرةً، مقداراً و/ أو اتجاهاً تؤثر على الأجسام المتحركة، علاوةً على القوى الثابتة. وعلى هذا الأساس يمكن أن تكون القوى المؤثرة وردود الأفعال بين الأجسام المتحركة متغيرة.

وكما تبين التجارب العلمية، فقد تعتمد القوة على الزمن أو على موضع الجسم أو على سرجهته، أو على متغيراتٍ أخرى لا مجال لذكرها الآن، وقد تعتمد على اثنين من هذه المتغيرات أو كلها. ولهذا فقوة نيوتن للجاذبية تعتمد على موضع (ارتفاع) الجسم بالنسبة لسطح الأرض، بينما تعتمد قوة مقاومة الوسط على سرعة حركة الجسم فيه. وبوجهٍ عام، فالديناميكا علمٌ يأخذ بعين الاعتبار تأثير القوى الفعالة، وقوى القصور لنفس الأجسام المتحركة على حركتها.

إن قوة القصور لجسمٍ ما، هو خاصية هذا الجسم لتغيير حركته إلى أسرع أو أبطأ تحت تأثير القوى المؤثرة عليه. فعلى سبيل المثال، إذا كان التغير في سرعة أحد الأجسام أكثر بطءً مما في جسمٍ آخر تحت تأثير قوتين متكافئتين، فإن الجسم الأول يكون أكثر قصوراً والعكس صحيح. وتعتمد درجة قصور الجسم على كمية ما يحتويه هذا الجسم من مادة. ويطلق على الكمية التي يعرف بها ما يحتويه الجسم من مادة وتحدد مقدار قوة قصوره بكتلة الجسم. ولذلك تعتبر الكتلة دائماً كميةً موجبةً في الميكانيكا.

من جهةٍ أخرى، فإن حركة الجسم لا تعتمد على كتلته الكلية والقوى المؤثرة عليه فقط، وإنما على الأبعاد الهندسية للجسم نفسه، وعلى مواضع الجسيمات المكونة له، أي على توزيع الجسيمات وكتلها. وحتى نستطيع أن نغُضّ النظر في بداية دراسة الديناميكا عن تأثير أبعاد الجسم أو حتى توزيع جسيماته، نورد مفهوماً جديداً هو الجسيم المادي أو الجسيم particle. ويعرف الجسيم بأنه عنصرٌ طبيعي ذو كتلة، أبعاده متناهيةَ الصغر ويمكن اهمالها عند دراسة حركته. وتصنف حركة الجسيم تبعاً لذلك، كإحدى الحالتين: الحركة الانتقالية المستقيمة rectilinear translation motion والحركة المنحنية curvilinear motion. وبناءً عليه، نعتبر كوكباً ما أثناء حركته حول الشمس، أو قذيفة مدفعٍ عند تعيين مداها، أو بروتوناً أثناء حركته في مسارعٍ دائري جسيماً مادياً.

ومن الطبيعي أن تسبق دراسة حركة **الجسيم المادي** دراسة حركة **نظام الجسيمات المادية** أو **النظام** System of Particles، أوحتى **الجسم الجاسئ** Rigid Body. ولهذا يُقسم منهج الديناميكا عادةً إلى **ديناميكا الجسيم وديناميكا النظام والجسم الجاسئ**. كما تُقسم مسائل الديناميكا إلى المسألتين التاليتين: الأولى: تعيين القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك (النظام) عند معرفة حركة هذا الجسيم، والثانية تعيين قانون حركة الجسيم (النظام) عند معرفة القوة المؤثرة عليه. هذا وتعتبر الأخيرة المسألة الأساسية في الديناميكا.

2.3 قوانين الديناميكا الأساسية

قانون نيوتن الأول، حركة القصور Inertial Motion

إنها لملاحظةٌ مألوفةٌ أن نجعل جسماً ساكناً فوق سطحٍ مستوٍ يتحرك نتيجةَ دفعه أو سحبه أو حتى دسره (دفعه بشدةٍ) ميكانيكياً. فعند زوال التأثير الميكانيكي المسبب للحركة يسكن الجسم. هذه الحقيقة حَدَت **بأرسطو**، ومن جاء بعده من العلماء والفلاسفة الطبيعيين، أن يفترض بأن الحركة المنتظمة السرعة (الأفقية والمستقيمة) تتطلب دسراً متواتراً؛ أي قوةً ثابتةً مؤثرةً على الجسم. وكما ورد في **الباب الأول**، اعتقد **أرسطو** أيضاً أن سرعة الجسم الساقط تتناسب طردياً مع صفته الطبيعية (وزنه)، بما يعني أن الجسم الثقيل أسرع في السقوط من الجسم الأخف وزناً. وكان **غاليليو**، في بواكير القرن السابع عشر أول من رأى الخطأ في هذا التفسير. إذ أدرك أنَّ هذه النظرة المبنية على الإدراك العام لا العلمي نظريةً خاطئة. وبادر وقد عدِم الوسيلة لأن يوجد فراغاً، إلى دحرجة كراتٍ ذوات أحجامٍ مختلفة على سطوحٍ مائلة. هذه التجارب بينت أن الإنحدار على السطوح المائلة يعطي الكرات المختلفة تسارعاً واحداً. وتبعاً لذلك، استنتج بالمقارنة أن الأجسام جميعها تتسارع بمعدلٍ ثابت تقريبا عند سقوطها الحر. هذه الجدليات انبثقت عن مفاهيم نوتْنِيَّة، لم تكن معروفة لدى **غاليليو**، فكان عليه أن يشق طريقه بنفسه.

وكان **أرسطو** قد عرف نصف مفهوم القصور - يميل الجسم الساكن للبقاء ساكناً. إذ كان هذا كافياً للتعامل مع أرضٍ غير متحركة. وباقتناعه بكون كوبرنيكس وحركة الأرض، تحسس **غاليليو** طريقه بحثاً عن النصف الثاني لمفهوم القصور - يميل الجسم المتحرك للبقاء متحركاً. فاستحدث رحلةً بحريةً شيقةً لسفينةٍ تتحرك بسرعةٍ ثابتةٍ وبخطٍ مستقيم وذلك بعيد استقرارها في البحر بلا حراك. وفي معرض مقارناته لفعاليات المبحرين أثناء الرحلة مع مثيلاتها عند سكون السفينة تأكد له تكافؤ الحالتين بالتمام. إذ لا يستطيع أياً كان التأكد من الحالة التي هو فيها، أهي السكون أم الحركة بسرعةٍ منتظمة ومستقيمة. إلا أن **غاليليو** أخفق عند استخلاصه النتائج في تعميم مبدأ القصور. فبقي أسير افتراضٍ قَرْوَسَطِّي

خاطئ يستند إلى أن مفعول الأجسام ينجم عن نزوعٍ داخليٍ لا عن مجرد الكتلة وعن تطبيق القوة، كما لم يستطع تحرير نفسه فكرياً من أغلال الجاذبية الأرضية. ومن هنا كان (قانونه) الخاص بالأجسام الساقطة، والذي طالما دُعي قانون الميكانيكا الأول، لهو قانونٌ يشوبه الخطأ وأخطأه الصواب.

أمَّا **نيوتن** فقد أفلح دون تردد في تعميم مبدأ غاليليو في القصور إلى ما نهاية، وأعلنه قانون الميكانيكا الأول الذي ينص: **يظل كل جسيمٍ على حالته من السكون، أو من الحركة المنتظمة بخطٍ مستقيم، ما لم تُؤثر عليه قوةٌ تُغَيِّر من حالته هذه.** أو بتعابير رياضيةٍ ولغويةٍ: **إذا كانت القوة صفراً 0 = F، فإن التسارع يكون صفراً 0 = a، لينتج أن الجسيم يتحرك بسرجهةٍ ثابتةٍ** v=const. **أي أن قوةً صفرية تستلزم تسارعاً صفرياً (**أو **بصورةٍ مكافئة سرجهةً ثابتــةً).**

لقد شكل هذا الفهم الدقيق لمعنى القصور ل**نيوتن** اللَّبِنَةَ الأولى في صرح الجاذبية. إذ استند في ذلك إلى الحقيقة الواضحة: إذا كانت حركة القمر والكواكب الطبيعية، في حالة انعدام القوة هي حركةٌ في خطٍ مستقيم، فإن كون حركة هذه الأجرام مداريةً فعلاً ومتسارعةً يقتضي تفسيراً معيناً. إذ ينبغي أن تؤثر قوةً ما لكي تحرف الجرم السماوي عن مساره المستقيم إلى مساره المنحني حول الشمس. ولقد وجد **نيوتن** أن هذه القوة متناسبةٌ عكسياً مع مربع المسافة بين الكوكب المعين والشمس الجاذبة له- قانون الجاذبية العام universal law of gravitation.

كذلك يمكن تطبيق قانون نيوتن الأول على الأجسام الأرضية. فإذا كان مجموع قوتين أو اكثر مؤثرتين على جسم صفراً، تحرك الجسم بسرجهةٍ ثابتةٍ. والعكس بالعكس: إذا لوحظ أن جسماً ما يتحرك بدون تسارع، وجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليه صفراً. بيد أن هذا القانون يكون ذا دلالة خاصة عندما يطبق على **جسم معزول** isolated body، عندها يستحوذ هذا القانون على معنىً بدون تعريف القوة. إن غياب (تأثير) القوة معناه الانعزال. وعلى هذا يمكن تعريف القانون الأول لنيوتن: **يتحرك الجسم المعزول الحر من التأثيرات الخارجية بسرجهة ثابتة.**

وبما أن خبرتنا المألوفة بالحركة تُكَيِّفُنا لأن نفكر بطريقةٍ أرسطوِيَّة أكثر من نيُوتْنِيَّة، فإن تطبيق قانون نيوتن الأول على أوضاعٍ عادية قد يكون مربكاً، بالرغم من بساطة هذا القانون المتناهية. مثلاً، تحتم علينا نزعتنا الطبيعية الرد بالإيجاب على السؤال: هل تؤثر أيَّةُ قوى على غواصٍ هوائي أثناء سقوطه بالمظلة بسرعة ثابتة؟ ومن الطبيعي أن يكون جوابنا الايجابي هذا ، مستنداً إلى قوة الجاذبية المؤثرة عليه. لكن في الحقيقة ستكون محصلة القوى المؤثرة على الغواص الهوائي صفراً، فقوة احتكاك الهواء تبطل مفعول قوة الجاذبية.

أُطُرِ الإسْنَاد Frames of Reference

تستند الميكانيكا بشكلٍ خاص والفيزياء بشكلٍ عام إلى بياناتٍ حول الموضع في المكان . وتُحَدَّدُ عادة نقطةٌ في المكان بواسطة إحداثيات. فلتعيين موضع نقطةٍ ما على خطٍ مستقيم ، يكفي إحداثيٌّ واحد، بينما يلزم إحداثيان إثنان لتحديد نقطة في مستوى، وثلاثة إحداثياتٍ لتحديد نقطةٍ في مكانٍ ثلاثي الأبعاد. وكل نظامٍ إحداثيّ ينطوي على نُقطة معينة، هي نقطة الأصل، واتجاهاتٍ معينةٍ أو محاور وتعليمات، تحدد تموضع النقاط في المكان نسبة إلى نقطة الأصل والى المحاور. وليس ثَمَّةَ من نهايةٍ لعدد الأنظمة الإحداثية، فهناك العديد من الأنظمة المحددة الذي يكون مناسباً لمعضلاتٍ خاصة، إلا أن هناك أنظمةً قليلةً نسبياً تُستخدم على نطاق واسع. ومن بين الأنظمة الأكثر شيوعاً: الديكارتية والقطبية والأسطوانية والكروية (الكُرِّية).

وعلى العموم، تشكل نقطةُ أصلٍ مع فئة محاور ما يدعى بإطار إسناد. وإطار الإسناد هو فكرة أشمل من نظام الإحداثيات. فمن الممكن ضمن إطار إسنادٍ واحد وجود عددٍ متنوعٍ من أنظمة الإحداثيات. وفي التطبيقات الميكانيكية يتم اختيار أطر الإسناد على الأغلب لكي ترتبط ارتباطا وثيقاً بالأشياء المادية. وعليه يمكن اعتبار أي جسمٍ جاسيء أو مجموعة من الأجسام الجاسئة، مثل عربة تحمل بندولاً بسيطاً أو حاملةُ طائراتٍ أو مركز الأرض أو مركز الشمس أو مركز المجرة التي ننتمي إليها مركزاً لإطارٍ إسناد. ولذلك يعرف إطار الإسناد بإنه زاوية النظر التي يرى المشاهدُ العالمَ من خلالها.

وحتى يكتسب القانون الأول لنيوتن معناه، ينبغي أن يرتبط بإطار إسنادٍ معين، أو على الأغلب إلى فئةٍ معينةٍ من أطر الإسناد. وتسمى أطر الإسناد التي يتحقق بالنسبة لها قانون القصور بأطر الإسناد القصورية inertial frames of reference. وهذه الأطر الإسنادية أطرٌ مكانيةٌ بحتةٌ، ثابتةٌ ومستقرةٌ في مكانها، وفي أفضل الحالات تتحرك بسرعةٍ ثابتةٍ ولا تعتمد على الزمن - الزمن مطلق. والإطار القصوري بطبيعتهِ ومركزه بالتحديد يكون معزولاً عن التأثيرات الخارجية. ولذلك، يتطابق مركز هذا الإطار مع مركز الكون.

هذه الحقيقة، رغم كل الدقة في حساب حركة الأجسام، أضحت غير عملية. فحركة سلحفاةٍ تزحف لجُحْرِها أو حركة قذيفةٍ صاروخيةٍ عابرةٍ للقارات تنطلق لهدفها أو حتى حركة مركبةٍ فضائيةٍ تنطلق في مسارٍ زائدي حول الأرض لا يتم بهذا التعقيد. إذ تستند دراسة الحركتين الأوليتين مباشرةَ إلى موقع أو نقطة انطلاقهما كنقطة أصلٍ لإحداثياتٍ تعبر عن إطار إسنادٍ معين يكافئ القصوري. وهذا الإطار لا يكون صالحاً لدراسة الحركة الثالثة، إذ يكون عندها مركز الأرض الأفضل والأدق كنقطة أصلٍ لإحداثياتٍ تعبر عن إطار قصوري. ولذلك يُعَرَّفُ إطار الإسناد القصوري بأنه ذاك الإطار الذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بجسمٍ غير متسارع، إذا تأثر فقط بقوة جاذبية، بدلاً من عدم تأثره بأيةِ قوة، أو على وجه التقريب جسمٌ تسارعه ذو رتبةٍ أدنى من تسارع الجسم قيد الدراسة. ولذلك؛ فموقع نقطةٍ على سطح الأرض كنقطة بداية حركة سيارة أو حتى طائرةٍ يكفي كإطارٍ قصوري لدراسة الحركتين، بينما لا يكفي ذلك لدراسة حركة مركبةٍ فضائية تدور حول الأرض أو تنطلق نحو القمر. عندها يكون مركز الأرض الأمثل لدراسة حركة المركبة الفضائية، لكن ليس للمدى الذي يمكننا من دراسة حركة نيزكٍ يغوص في أعماق الكون. لحظتها يكون مركز الشمس هو مركز الإطار القصوري. وبالطبع، فإن هذا الظرف بالضبط هو الذي أدّى **بكوبرنيكس** إلى الثورة العلمية، التي حدّدت الشمس كمركز ثابتٍ للنظام الشمسي. ونحن نعلم الآن أن الشمس ليست ثابتة تماماً، إذ تدور حول المجرة بتسارع ضئيلٍ جداً جداً.

قانون نيوتن الثاني، كتلة القصور Inertial Mass

سرعة التغير في زَخَمِ الجسيم تساوي في المقدار والاتجاه القوةَ التي تؤثر عليه. لقد انطلق **نيوتن** من المعادلة

$$\mathbf{F}\,(t_2 - t_1) = m\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \qquad 1.3$$

والتي تبين العلاقة، بين الدفع impulse، رمزه $\mathbf{P}$، $\mathbf{P} = \mathbf{F}\,(t_2 - t_1)$، والتغير في الزَّخَم change of momentum، رمزه $\Delta\mathbf{K}$، $\Delta\mathbf{K} = m\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$. وتعتبر المعادلة 1.3 أقرب ما يكون إلى الشكل الذي عبر به **نيوتن** عن قانونه الثاني [1]. ويُسَمَّى ثابتُ التناسب في تلك المعادلة m، بكتلة القصور أو ببساطه كتلة الجسيم، $\boldsymbol{v}_1$ و$\boldsymbol{v}_2$ سرجهتي الجسيم في اللحظتين المتتاليتين t_1 و t_2. أما **أويلر** Euler فقد قام بقسمة طرفي المعادلة 1.3على الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ فحصل على المتساوية

$$\mathbf{F} = m\,\frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = m\,\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

وباستخدام صيغة النهاية، فإن

$$\mathbf{F} = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

أو بشكل آخر

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad 2.3$$

حيث أن تسارع الجسيم $\mathbf{a}$ يساوي المشتقة الأولى لسرجهته $\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. هذه المعادلة 2.3 تعرف قانون نيوتن الثاني بصيغة أخرى: **حاصل ضرب كتلة الجسيم وتسارعه يساوي القوةَ (المتجه الرئيسي للقوى) المؤثرة على الجسيم في المقدار والاتجاه**. كما يمكن الحصول على نفس النتيجة بدون الحصول على محصلة القوى المؤثرة على الجسيم. وتبعاً لذلك، إذا أثرت عدة قوىً على جسيمٍ واحد فإن كل قوة من هذه القوى تُكسِبِ الجسيم التسارع الذي تكسبه إيّاه فيما لو أثرت تلك القوة لوحدها.

وكي نتدبر مدلول كتلة القصور نتخيل رائدي فضاءٍ يحومان بحرية داخل قَمْرَة سفينتهما الفضائية في حالة انعدام الوزن. فهما يعومان بعيداً عن بعضهما البعض بطريقة معينة لحظة انفصالهما. ويمكن ملاحظة أن رائداً نحيلاً انطلق بسرعة أكبر من آخر بديناً. إذ نعزو ذلك إلى كتلته الأصغر، وبخاصةٍ كتلة قصوره الأصغر. كما أن كرةً مقذوفةً من رائدِ فضاءٍ منفرد وعائم في وسط القمرة ستتحرك بسرعةٍ هائلةٍ نسبة إلى قاذفها المرتد في الاتجاه المضاد بتؤده. وإذا انطلقت الكرة أسرع من رائد الفضاء بأربعمئة مرة، فما مردُّ ذلك إلا لإن كتلتها هي جزءٌ واحدٌ من أربعمئة من كتلة رائد الفضاء. ولذلك فمقاومتها للشروع بالحركة، إذن، هي أقل بأربعمئة مرة.

---

[1] عبارة **نيوتن**: يتناسب التغير في الحركة مع القوة المحركة المؤثرة، وتحدث بنفس اتجاه نفس الخط التي تؤثر فيه تلك القوة. هذه هي ترجمة عبارة نيوتن الأصلية بالاتينية. وهو يستخدم الحركة بدلاً من الزَّخَم والقوة بدلاً من الدفع، لذا يتوجب نقل عبارته تلك لتنطق بالمصطلح الحديث على الصورة التالية: **يتناسب التغير في الزخم مع الدفع المؤثر ويكون اتجاهه موازياً للدفع**. انظر: **فورد و .ك**. الفيزياء الكلاسيكية والحديثة، مجلد 1 من قائمة المراجع العربية. ص 349.

نلاحظ من المعادلة الاتجاهية 2.3 أن التناسب بين القوة والتسارع اتجاهيّ. فالتسارع يكون في اتجاه القوة (محصلة القوى) المؤثرة على الجسيم قيد الدراسة، بغَضِّ النظر عن السرجهة واتجاهها. هذا التناسب لا يستلزم أيَّةَ صِلَةٍ سببية بين القوة والتسارع، إذ يكون طبيعياً إلى حدٍ ما أن نفكر بالقوة كأنها السبب، والتسارع كأنه النتيجة. كذلك يكون من الصحيح منطقياً - سواءً بسواء - أن نقول أن التسارع يسبب القوة، بل إنه لمن الأسهل أحيانا أن نفكر بهذه الطريقة. فبوسعنا القول، مثلاً ، أن تسارع سيارة إلى الأمام (يجعلنا) نشعر بقوةٍ إضافيةٍ آتيةٍ من خلف المقعد. أياً كان الأمر، فإن الصيغة 2.3 بوصفها أحد نواميس الطبيعة، تنص فقط على أن القوة والتسارع يردان معاً بطريقةٍ معينة.

الوزن والكتلة

تؤثر على كل الأجسام الواقعة قرب سطح الأرض قوة الجاذبية الأرضية $\mathbf{F}_{grav}$، المساوية عددياً لوزن الجسم. وتؤثر هذه القوة سواءً أكان الجسم متحركاً أم ساكناً. لكنها تقاس على الوجه الأنسب عندما يكون الجسم ساكناً. وقد بَيَّنَت التجربة أن كلَّ الأجسام عند سقوطها على الأرض من ارتفاعٍ قليل، وباهمال مقاومة الهواء لها تسارعٌ واحد هو تسارع الجاذبية الأرضية $\mathbf{g}$. وبما أن قياس الوزن هو قياسٌ ساكن، فإنه يُزَوِّدُنا بمعلوماتٍ هامةٍ عن قوةٍ طبيعيةٍ أساسيةٍ ومستقلةٍ عن قوانين الحركة.

وتسفر دراسات قوة الجاذبية عن الحقائق التالية: بالقرب من سطح الأرض يكون وزن الجسم - لدرجة جيدة من التقريب - مستقلاً عن موضعه. وتكون قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم مستقلةً عن نوع أو حالة حركته. والأهم من هذا وذاك، أن الوزن يتناسب مع الكتلة تناسباً كونياً لكل المواد وسائر الأحجام.

ونظراً للتناسب الملاحظ بين الوزن والكتلة (كتلة القصور)، فغالباً ما يكون هناك خلطٌ بين هذين المفهومين. فكتلة القصور التي تُعرَّف في قانون نيوتن الثاني بثابتِ التناسب بين القوة والتسارع، هي مقياس للمقاومة المبذولة ضد التغيير في حركة جسمٍ خاضعٍ لنفس القوة. من ناحية أخرى فإن الوزن هو - على وجه التحديد - مقياس لشدة استجابة الجسم المتحرك لقوة الجاذبية. وقد ظلَّ تناسبهما (الوزن والكتلة) الطردي، الذي اكتشفه **نيوتن**، لغزاً غامضاً لأكثر من قرنين من الزمن حتى بداية القرن العشرين. هذا ويمكن كتابة التناسب التجريبي بين قوة الجاذبية $\mathbf{F}_{grav}$ وكتلة القصور m على الصورة

$$\mathbf{F}_{grav} = m\,\mathbf{g}$$

حيث $\mathbf{g}$ ثابت التناسب الجديد. فإذا اختير محور z، مع متَّجِه الوَحْدَة $\boldsymbol{k}$، لنظامٍ إحداثي ديكارتي، بحيث يُشير إلى الأعلى، كانت المعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{F}_{grav} = -m\,g\,\boldsymbol{k}$$

ومع أن الثابت g يكون دائماً ثابتاً في الموضع الواحد على سطح الأرض، ومستقلاً عن حجم وطبيعة المادة الموزونة، إلا أنَّه يتفاوت قليلاً من موضعٍ لآخر، وذلك بالاعتماد على (زاوية) خط العرض[2]. وإن مقارنة قانون القوة هذا مع قانون نيوتن الثاني، لَتُبَيِّن أن g، ينبغي أن يكون لها نفس البعد كالتسارع. وإذا كانت قوة الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم قيد الدراسة، فإن تسارعه يرتبط حسب قانون نيوتن الثاني

$$\mathbf{F}_{grav} = m\,\mathbf{a}$$

وبربط المعادلتين الإتجاهيتين الأخيرتين، ينتج للتَّو أن

$$\mathbf{a} = -g\,\boldsymbol{k} \quad \& \quad a = g$$

وهذا تسارعٌ ثابتٌ متَّجهٌ للأسفل، مقداره 9.8 متر/ثانية تربيع ل(زاوية) خط العرض $\varphi = 31^{\circ}45'$. ولذلك، يدعى g عادةً بتسارع الجاذبية acceleration of gravity [2].

قانون نيوتن الثالث Newton's Third Law

يؤثر الجسيمان المتفاعلان كل منهما على الآخر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه. ورياضياً نرمز لذلك بالمعادلة

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ji} \qquad 3.3$$

واصطلاحاً، سنجعل الحرف السفلي الأول i يدل على الجسيم المتأثر بالقوة، والحرف السفلي الثاني j يدل على الجسيم المؤثر بالقوة. وبصورةٍ أكثر تعميماً، يمكن صياغة القانون كالأتي: **ترد كل قوى الطبيعة في أزواج متساويةٍ ومتضادة.** يلاحظ أن هذا القانون يحتاج لتطبيقه إلى جسيمين متفاعلين على الأقل، على عكس القانونين الأول والثاني اللذين يمكن صياغتهما بدلالة أجسامٍ أو جسيماتٍ منفردة.

هذه الصياغة لقانون نيوتن الثالث لا تختلف كثيراً عن صياغة **نيوتن** نفسه للقانون: **لكل فعل يوجد رد فعل مساوٍ ومضاد؛** أو **إن الفعلين المتبادلين بين الجسيمين يتساويان ويتضادان.** وإن كان استخدامه لكلمة فعلٍ بدلاً من كلمة قوة غير واضحَ المعالم [3].

ومن أهم مظاهر قانون نيوتن الثالث التي تستوجب الفهم، هو أنه قانون قوة وليس قانون حركةٍ بصورةٍ مباشرة. فهو لا يفصح بأيّ شيءٍ، لا عن الحركة ولا عن القوى المؤثرة على الجسم المتحرك أو الساكن والتي تنشأ عن أي شيءٍ آخر غير الجسم الثاني، ولا عن نوع القوة المؤثرة بين الجسمين المتفاعلين. فعلى سبيل المثال يَنُصُّ القانون: إذا تأثر جسمٌ إلى أسفل بقوةِ جاذبية الأرض، مقدارها F، إنجذبت الأرض من الجسم إلى الأعلى بمحصلةِ قوةٍ مقدارها أيضاً F، بغَضٍّ النظر عن أية قوى أخرى قد تؤثر على النظام المكون من الجسم والأرض، وبغَضٍّ النظر عما إذا كان الجسم متحركاً أو يستقر على منضدة. وتتحدد حركة كل من الأرض والجسم بالقوة (محصلة القوى) الكلية المؤثرة على كل منهما - قانون نيوتن الثاني. وقوة جاذبية الأرض هي واحدةٌ من بين مجموعة القوى الممكنة المؤثرة على الجسم. كما أن قوة جذب الجسم للأرض هي مجرد قوةٍ واحدةٍ من بين مجموعة القوى المؤثرة على الأرض. وبموجب قانون نيوتن الثالث تكون هاتان القوتان متساويتين ومتضادتين، أي أنهما زوجٌ متناظر.

---

[2] تتغير قيمة تسارع الجاذبية الأرضية بدلالة خط العرض حسب الصيغة الدولية للجاذبية international gravity formula

$$g = 9.781\,(1 + 0.53\times10^{-3}\sin^2\phi - 5.9\times10^{-6}\sin^2 2\phi)$$

حيث أن $g_o = 9.781\,[m/s^2]$ تسارع الجاذبية لمستوى سطح البحر عند خطِّ الاستواء. وبالتالي فتسارع الجاذبية في القدس، خط العرض $\phi = 31^{\circ}45'$ يساوي $g = 9.795\,[m/s^2]$. انظر **الباب السابع** والبند 2.7 بالتحديد.

[3] ربما قصد بذلك شمُول مفهوم **فعل** مفهومي **القوة** و**تَغَيُّر الزَّخَم**، ولربما فقط لسببٍ لغويٍ مفاده أن كلمة **فعل** action، لها ضدٌ مناسب، **رد فعل** reaction، في حين أن **قوة** ليس لها مثل ذلك. أنظر: **فورد و. ك** . الفيزياء الكلاسيكية والحديثة، مجلد 1 من قائمة المراجع العربية. ص 349.

لذلك يساعدنا قانون نيوتن الثالث على الاستنتاج أن قوة الجاذبية متبادلة. فالأرض لا تشدّ الكواكب والقمر بقوة جاذبيتها فحسب، بل إن تلك الأجرام تفعل الشيء ذاته فتتعرض الأرض لقوىً جاذبيتها (الأجرام). وإن هذا التبادل في الجذب الناتج عن قوة الجاذبية ليؤدي إلى تعقيداتٍ في حركات الكواكب. فالمشتري مثلاً، بضخامة كتلته يشوش على مدارات الكوكب المجاور له، أي زحل.

وبالطبع فإن سقوط الأجسام على الأرض يخضع أيضاً لقانون رد الفعل، بالرغم من عدم ظهور هاتين القوتين في الحال. إن التفاحة تسقط على الأرض لان هذه الأخيرة تجذبها إليها، ولكن التفاحة تجذب الأرض اليها بنفس القوة تماماً. وبعبارةٍ أدق، فإن كلاً من التفاحة والأرض، تسقطان على بعضهما البعض، ولكن سرعة سقوط التفاحة على الأرض تختلف عن سرعة سقوط الأرض على التفاحة. فالقوى المتساوية والمتضادة للجذب المتبادل بين الأرض والتفاحة، تعطي التفاحة تسارعاً قدره 9.8 متر لكل ثانية تربيع بينما تعطي الأرض تسارعاً يقل عن تسارع التفاحة بنسبة كتلة الأرض إلى كتلة التفاحة. وحيث أن كتلة الأرض أكبر من كتلة التفاحة بعددٍ لا متناهٍ من المرات فإن هذا يجعل الأرض لا تنتقل من مكانها إلا بمقدارٍ ضئيلٍ جدا يمكن اعتباره مساوياً للصفر. ولهذا السبب نقول أن التفاحة تسقط على الأرض بدلاً من قولنا بأن كلاً من التفاحة والأرض تسقطان على بعضهما البعض.

3.3 وَحَدَات القياس والأبعاد Units and Dimensions

تقاس الكميات الفيزيائية نوعياً بوَحَداتٍ بُعدِيةٍ وكمياً بوَحَداتِ عددية. إن استخدام قانون نيوتن الثاني يتطلب استعمال مجموعةٍ متجانسةٍ من الوَحَدَات، حيث يبين القانون المذكور العلاقة بين الوَحَدَات المكونة له وهي القوة والكتلة والتسارع. إن الوَحَدَات المستخدمة لأي كميتين من الكميات الثلاث الوارد ذكرها تحدد وَحْدَة الكمية الثالثة اشتقاقاً من القانون نفسه. لقد اصْطُلِح على أن وَحْدَتَي الطول [L] والزمن [T] تكونان أساسيتين، بما يعني أن وَحْدَة التسارع تصبح مميزةٌ [LT^2]. ولذلك علينا اختيار أيٍ من الكميتين المتبقيتين، الكتلة، أو القوة ستكون أساسية . وعليه نميز المجموعتين التاليتين:

1- مجموعة الوَحَدَات المُطْلَقَة Absolute Systems of Units

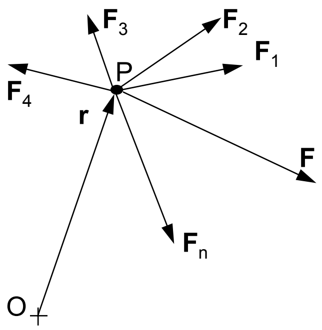
تعتبر فيها وَحَدَات الطول [L] والزمن [T] والكتلة [M] أساسية، أما القوة فَتُشْتَقُّ من هذه الوَحَدَات انطلاقاً من قانون نيوتن الثاني. وتعرف تبعاً لذلك، **وَحْدَة القوة بالقوة اللآزمة لاكساب وَحْدَة الكتلة تسارعاً مقداره وَحْدَة تسارع.** وتعتبر مجموعة **النظام الدُّوَلِي** للوحدات *SI* مجموعةَ وَحَدَات مُطلقةٍ حيث يُقاسُ التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع أما الكتلة فتقاس بالكيلوغرامات. وعلى هذا الأساس فإن **وَحْدَة القوة**، المشتقة من الوحدتين الباقيتين ستعرف **بالقوة التي تُكْسِب كتلةً مقدارها كيلوغرام واحد تسارعاً مقداره مترٌ واحد لكل ثانية تربيع.** وتعرف هذه القوة **بالنيوتن** [$1[N]=1[kg.m/s^2]$]. كما يَنْتَمِي نظام **س غ ث** *CGS* [4]، ووَحَدَاته السنتمتر للطول والغرام للكتلة والثانية للزمن إلى مجموعة الوحَدَات المطلقة تماماً مثلما هو الحال بالنسبة **للنظام الدُّوَلِي** للوحَدات *SI*. وتقاس القوة عندئذ **بالدّاين** [dyne]، الذي يعرف **بـــالقوة التي تَكْسَبها كتلة الغرام الواحد عند التأثير عليها بتسارع مقداره سنتمترٌ واحد لكل ثانية تربيع.**

2- مجموعة الوَحَدَات التثاقلية Gravitational Systems of Units

تعتبر فيها وَحَدَات الطول [L]، والزمن [T]، والقوة [F] وَحَدَات أساسية، أما الكتلة فتشتق من هذه الوَحَدَات. وتعرف **وَحَدَة الكتلة بـــالكتلة التي تتسارع بوَحْدَة تسارعٍ عند التأثير عليها بوَحْدَة قوة**. أما **وَحْدَة القوة** فتعرف **بقوة جذب الأرض لكتلةٍ عياريَّةٍ** Standard Mass. وإذا تغير موقع تحديد الكتلة العيارية فستتغير تبعاً لذلك وَحْدَة القوة بالنسبة لمجالها الأرضي، أي موقعها. إن الوَحْدَة التثاقلية تعني الوَحْدَة التي تتغير عند تغير موقع الكتلة العيارية بالنسبة لمجال جاذبية الأرض. بينما يحدد مفهوم الوَحْدَة المطلقة أنها غير مرتبطة بموقع الكتلة العيارية نسبة إلى سطح الأرض.

4.3 المعادلة التفاضلية لحركة جسيمٍ تحت تأثير قوىً محددة

اعتبر حركة الجسيم P، كتلته m، وتؤثر عليه مجموعة القوى المحددة $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ ، $\mathbf{F}_3$ ..... و$\mathbf{F}_n$ التي محصلتها (مُتَّجهها الرئيسي) $\mathbf{F}$، $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+.....+\mathbf{F}_n$، **شـــكل 1.3**. إذا كان المتَّجه $\mathbf{r}$ يعرف تموضع هذا الجسيم والمتَّجه $\mathbf{a}$ يعرف تسارعه، معادله 35.2، $\mathbf{a}=\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$، فإن المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم يتم باستبدال كلٍ من $\mathbf{F}$ و $\mathbf{a}$ الواردتين أعلاه في المعادلة 2.3



شـــكل 1.3

$$\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 4.3$$

هذه المعادلة الاتجاهية تصلح لوصف حركة الجسيم ديناميكياً. كما يمكن تعريف نفس المعادلة بأيٍ من الإحداثيات المختلفة. عندئذٍ تأخذ المعادلة 4.3 أشكالاً قياسية أخرى. فنكتب المعادلة

$$F_x\,\boldsymbol{i}+F_y\,\boldsymbol{j}+F_z\,\boldsymbol{k}=m\,a_x\,\boldsymbol{i}+m\,a_y\,\boldsymbol{j}+m\,a_z\,\boldsymbol{k} \qquad 1.4.3$$

في الإحداثيات الديكارتية، أو المعادلة

$$F_n\,\mathbf{e}_n+F_t\,\mathbf{e}_t=m\,a_n\,\mathbf{e}_n+m\,a_t\,\mathbf{e}_t \qquad 2.4.3$$

في الإحداثيات الطبيعية، أو المعادلة

$$F_r\,\mathbf{e}_r+F_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi=m\,a_r\,\mathbf{e}_r+m\,a_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 3.4.3$$

في الإحداثيات القطبية.

---

[4] *CGS* مختصرة من الكلمات الإنجليزية *Centimeter Gram Second*.

حــل المســـائــل

يقوم حل مسائل الديناميكا على تكامل المعادلات التفاضلية والذي يشمل

1- اختيار نقطة الأصل لإطارِ إسنادٍ قصوري منطبقةً على موضع الجسيم الابتدائي قدر الإمكان.

2- تحديد نظام الإحداثيات اللازم للحركة، الديكارتي، أو القطبي، أو الطبيعي بحيث يكون إحداثيٌّ واحد منطبقاً على امتداد الحركة قدر الإمكان.

3- تمثيل الجسيم في موضعٍ اعتباطي arbitrary على الرسم، وليس في موضعٍ خاصٍ له كالموضع الابتدائي.

4- تحديد القوى المؤثرة على الجسيم المتحرك في اللَّحظة المعينة، وتكوين المعادلة التفاضلية لحركته، مثل المعادلة 4.3، أو إحدى مركباتها المختلفة.

5- حلُّ المعادلة (المعادلات) التفاضلية بالطرق الرياضية المعروفة بما يلزم ذلك إيجاد ثابت أو ثوابت التكامل من الشروط الابتدائية للحركة.

وكما ذكر سابقاً في بداية هذا الباب، يوجد في الديناميكا مسألتان. يتطلب حل الثانية تعيين معادلة حركة جسيم تحت تأثير قوةٍ محددة، وهي لذلك الأعقد. وإذا اعتبرنا أنَّ القوة تعتمد بشكلٍ أو بآخر على متغيراتٍ ثلاث هي الزمن والسرجهة والمسافة، فإن حلَّ هذه المسألة سيكون معقداً وفي أحسن الأحوال سيكون حلاً عاماً. لذلك، يقتصر حلنا على مسائلَ محددةٍ، كأن تعتمد القوة على الزمن، أو على السرجهة، أو على المسافة وبشكلٍ منفرد.

القوة تعتمد على الزمن

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(t) \qquad 5.3$$

ولأن التسارع يساوي مشتقة السرجهة الأولى ، $\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ ، فإن ترتيب المعادلة 5.3 الناتجة وإجراء التكامل عليها يبين أن سرجهة الجسيم تتحدد بالمعادلة التكاملية

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \frac{1}{m}\int_0^t \mathbf{F}(t)\,dt \qquad 6.3$$

وحيث أن السرجهة تساوي مشتقة متجه الموضع ، $\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ، فإن ترتيب المعادلة 6.3 وإجراء التكامل المحدود يبين أن تموضع الجسيم يتحدد بالمعادلة التكاملية التالية

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \boldsymbol{v}_o t + \int_0^t \left[\frac{1}{m}\int_0^t \mathbf{F}(t)\,dt\right]dt \qquad 7.3$$

حيث يظهر الثابتان $\mathbf{r}_o$ و $\boldsymbol{v}_o$ كثابتي تكامل تتحدد قيمهما من الشروط الابتدائية للتكامل.

سـؤال م 1.3

اوجد معادلة حركة الجسيم الذي كتلته 5 كيلوغرامات وتؤثر عليه القوة $\mathbf{F} = 6t^2\,\boldsymbol{i}$، إذا ما تحرك من السكون من الموضع الابتدائي $\mathbf{r}_o = 5\boldsymbol{i}$.

الـحـل

بتطبيق قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم وللاتجاه $\boldsymbol{i}$ يكون

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(t) \;\Rightarrow\; 5\, dv_x/dt = 6t^2$$

تتحدد سرعة الجسيم بالمعادلة التكاملية ، حيث تحرك الجسم من السكون يعني أن $v_{xo} = 0$

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 1.2\,t^2\,dt \;\Rightarrow\; v_x = 0.4\,t^3$$

وبكتابة السرعة في المعادلة الأخيرة بدلالة مشتقة موضع الجسم

$$v_x = dx/dt \;\Rightarrow\; \int_5^x dx = \int_0^t 0.4\,t^3\,dt$$

نحدد المسافة المقطوعة بعد إجراء التكامل المحدود والأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية للحركة

$$x = 0.1\,t^4 + 5$$

والتي تمثل معادلة حركة الجسيم .

القوة تعتمد على السرجهة

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(\boldsymbol{v}) \qquad 8.3$$

ولأن التسارع يساوي مشتقة السرجهة الأولى

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

فإن استبدال ذلك في المعادلة 8.3 وترتيبه ثُمَّ إجراء التكامل المحدود يعطي الزمن

$$m\int_{\boldsymbol{v}_o}^{\boldsymbol{v}} \frac{d\boldsymbol{v}}{\mathbf{F}(\boldsymbol{v})} = \int_0^t dt \;\Rightarrow\; t = f\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\} \qquad 9.3$$

أو كدالة سرجهة

$$\boldsymbol{v} = g\{t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\} \qquad 10.3$$

وباستبدال $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ في هذه المعادلة ثُمَّ ترتيبها وإجراء التكامل المحدود نحصل على تموضع الجسيم

$$\mathbf{r} = \int_0^t g\{t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\}\,dt + \mathbf{r}_o \;\Rightarrow\; \mathbf{r} = h(t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v}), \mathbf{r}_o) \qquad 11.3$$

حيث أن كلاً من f ، g و h دوالٌ محددة.

سـؤال م 2.3

أوجد معادلة حركة ممتص الصدمات الخطي linear damper الذي كتلته m ويتحرك تحت تأثير قوة الاهتزاز الخطية $F = -kv$، حيث k ثابت التناسب و v سرعته بالأمتار لكل ثانية، إذا ناظرت اللحظة الابتدائية $t_o = 0$ السرعة الابتدائية v_o عندما كان ممتص الصدمات على بعد $x_o = 0$. اعتبر الحركة في الاتجاه $\boldsymbol{i}$.

الـحـل

قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = F\,\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad m\,a_x = -k\,v \qquad 1$$

وباستبدال التسارع a_x كمشتقة السرجهة الأولى، ثم ترتيب المعادلة 1 للتكامل يكون الحل زمنياً

$$-\frac{m}{k}\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{m}{k}\ln\frac{v}{v_o}$$

أو كدالة سرعة

$$v = v_o\, e^{-kt/m} \qquad 2$$

وباستبدال السرجهة، في المعادلة 2، كمشتقة الموضع، وترتيبها للتكامل يكون الحل معادلة الحركة التالية

$$x = \frac{m\,v_o}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right) \qquad 3$$

القوة تعتمد على المسافة

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \qquad 12.3$$

وباستبدال التسارع $\mathbf{a} = \boldsymbol{v}\dfrac{d\boldsymbol{v}}{d\mathbf{r}}$ في المعادلة 12.3، ثُمَّ ترتيبها وإجراء التكامل المحدود يكون

$$\frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_o^2\right) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \qquad 13.3$$

والتي يمكن حلها بدلالة الموضع بالشكل الضمني implicit التالي

$$\mathbf{r} = q\left(\mathbf{r}_o, \boldsymbol{v}_o, \boldsymbol{v}, \mathbf{F}(\mathbf{r})\right) \qquad 14.3$$

حيث أن q دالّة محددة.

سـؤال م 3.3

تسارع جسيمٍ معرف بالعلاقة

$$a = 3\,x^{2/3} - x/4 \quad [\mathrm{m/s^2}] \qquad 1$$

احسب سرعة الجسيم عندما تكون القوة المؤثرة ذات قيمةٍ حدّية. وما سرعة الجسيم القصوى v_{max}؟ الجسيم ذو كتلةٍ، مقدارها الوَحْدَة، يتحرك بدون سرعةٍ ابتدائية من النقطة $P_o(0,0,0)$.

الـحـل

القوة حسب قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = 1 \times \{3\,x^{2/3} - x/4\} \quad [\mathrm{N}] \qquad 2$$

وتكون (القوة) ذات قيمةٍ حدِّيَة (أكبر قيمة) إذا ساوينا مشتقتها بدلالة x بالصفر. فنكتب

$$\frac{dF}{dx}=\left\{2x^{-1/3}-\frac{1}{4}\right\}=0 \quad \Rightarrow \quad x = 512\ [m] \qquad 3$$

نحدِّد سرعة الجسيم كدالة مسافة x فنعوض التسارع $a = v\dfrac{dv}{dr}$ في المعادلة 1، التي تؤول بعد ترتيبها واستبدال الشروط الابتدائية وإجراء التكامل إلى الشكل التالي

$$v dv = \left\{3\,x^{2/3}-\frac{1}{4}x\right\}dx \quad \Rightarrow v^2 = 2\left\{\frac{9}{5}\,x^{5/3}-\frac{1}{8}x^2\right\} \qquad 4$$

وباستبدال $x = 512\ [m]$ نجد مقدار السرعة

$$v = 228.97\ [m/s] \qquad 5$$

أما السرعة القصوى (الحدِّية) فتتحدد من مساواة مشتقة السرعة (أو مربع السرعة) بدلالة المسافة بالصفر. فنكتب

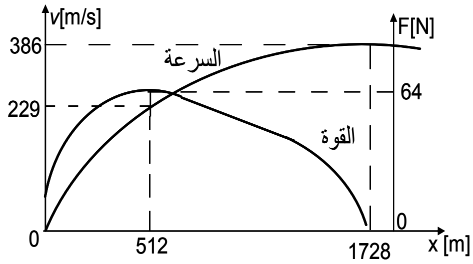
$$\frac{dv^2}{dx} = 2\left\{\frac{9}{5}\frac{5}{3}\,x^{2/3}-\frac{2}{8}x\right\} = 2x^{2/3}\left\{3-\frac{1}{4}x^{1/3}\right\} = 0 \qquad 6$$

وحلها يعطي

$$x_1 = 0 \ \ \& \ \ x_2 = 1728\ [m] \qquad 7$$

ومن السهولة بمكان الإثبات رياضياً أن استبدال x_1 في معادلة السرعة 5 يُعطي السرعة الصغرى min. value بينما استبدال x_2 يُعطي السرعة العظمى max. value. وعليه يكون

$$v_{min} = 0 \ \& \ v_{max} = 386.4\ [m/s] \qquad 8$$



تغير القوة والسرعة بدلالة المسافة

افحص قيم التسارع a للقيمتين x_1 و x_2.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سـؤال م 4.3

أوجد سرعة وتسارع صندوق، كتلته 12 كيلوغرام في اللحظتين t = 10 ثانية و t = 20 ثانية عندما يتحرك من السكون على سطح أفقي وخشن، معامل احتكاكه الاستاتيكي $\mu_s = 0.2$، والديناميكي $\mu_d = 0.186$، إذا ما سحب الصندوق بقوة أفقية **F** تتغير زمنياً كما في **الرسم البياني** 2.

الـحـل

نحدد نقطة الأصل في الموقع O بحيث ينطبق على الموقع الابتدائي لحركة الصندوق ونمد المحور Ox موازياً للحركة لليمين. الشروط الابتدائية للحركة هي

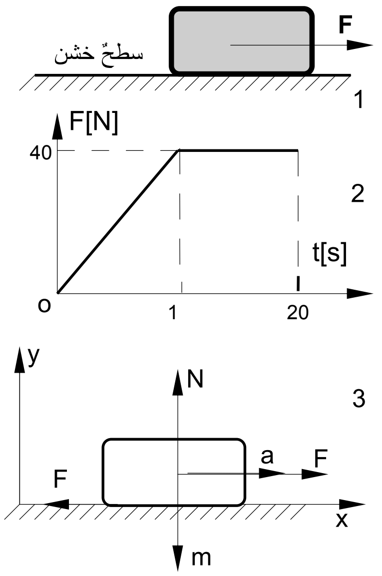
$t = 0 \quad , x = 0 \quad , \quad v_x = v_o = 0$

ونحدد على **الرسم** 3، القوى المؤثرة على الصندوق وهي قوة الوزن **mg** للأسفل، قوة رد فعل السطح **N** للأعلى، القوة الأفقية **F** لليمين وقوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mu$ بين السطح والصندوق لليسار بعكس الحركة. ونحدد أخيراً مُتَّجِهَ التسارع **a** لليمين باتجاه الحركة.

المرحلة الأولى

حركة الصندوق معدومة حتى تتغلب قوة السحب F (التي تزداد بانتظام حتى الثانية 10) على قوة الاحتكاك الاستاتيكي $F_{\mu s}$ بين السطح والصندوق. أي أن

$$F = F_{\mu s} \qquad 1$$



شـــكل م 4.3

قوة السحب الأفقية بين اللحظتين 0 و10 ثانية التي تزداد طردياً بدلالة الزمن t

$$F = 4\,t \qquad 2$$

بينما تتحدد قوة الاحتكاك F_μ من قانون نيوتن الثاني لحركة الصندوق

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\mu + \mathbf{N} + m\,\mathbf{g} \qquad 3$$

مسقط المعادلة 3 على المحور Oy يعطي

$$0 = N - mg \Rightarrow N = mg \qquad 4$$

بينما قوة الاحتكاك بدلالة معامل الاحتكاك الاستاتيكي

$$F_{\mu s} = \mu_s N \Rightarrow F_{\mu s} = \mu_s\, mg \qquad 5$$

وباستبدال F من المعادلة 2 و $F_{\mu s}$ من المعادلة 5 وتعويضهم في المعادلة 1 ينتج أن

$$t = 0.25\ \mu_s\, mg = 0.25 \times 0.2 \times 12 \times 9.8$$

$$t = 5.88\ [s] \qquad 6$$

أي يجب أن يمر 5.88 ثانية حتى يبدأ الصندوق بالحراك يميناً متغلباً على قوة الاحتكاك الاستاتيكي.

المرحلة الثانية

يبدأ الصندوق الحركة من السكون عند اللحظة t = 5.88 ثانية، وذلك تحت تأثير القوى المختلفة، **رســم** 3. وبإسقاط المعادلة 3 على المحور Ox نجد أن

$$m\,a = F - F_{\mu d} \qquad 7$$

حيث تكافئ $F_{\mu d}$ قوة الاحتكاك الديناميكي الناتجة من الحركة

$$F_{\mu d} = \mu_d\, mg = 0.186 \times 12 \times 9.8 = 21.87 \text{ [N]} \qquad 8$$

وباستبدال $F_{\mu d}$ من المعادلة 8 و F من المعادلة 2، يكون حل المعادلة الناتجة 7 كدالة تسارع زمنية

$$a = \frac{1}{3}t - 1.8228 \qquad 9$$

وفي اللحظتين t = 5.88 ثانية و t = 10 ثانية يكون التسارع

$$a_{t=5.88\,[s]} = 0.137 \text{ [m/s}^2\text{]}\ ,\ a_{t=10\,[s]} = 1.51 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

تتحدد سرعة الصندوق باستبدال a ، معادلة 9، كمشتقة سرعة. وبترتيب الناتج وإجراء التكامل المحدود

$$\int_0^v dv = \int_{5.88}^{t} \left(\frac{1}{3}t - 1.8228\right) dt \ \Rightarrow$$

$$v = 0.167\, t^2 - 1.8228\, t + 4.955 \qquad 10$$

وفي اللحظة t = 10 ثانية تكون السرعة

$$v_{t=10\,[s]} = 3.43 \text{ [m/s]} \qquad 11$$

المرحلة الثالثة

تبدأ من اللحظة t = 10 ثانية وبعدها. تكون القوةF ثابتةً مقداراً واتجاهاً، **رسم بياني** 2. وتؤول المعادلة 7 بعد قسمة طرفيها على الكتلة m إلى الشكل الجديد التالي

$$a = \frac{40 - 21.87}{12} = 1.51 \text{ [m/s}^2\text{]} \ \Rightarrow\ \forall\ \ t \geq 10 \text{ [s]} \qquad 12$$

وحيث أن محصلة القوى ثابتةٌ مقداراً واتجاهاً يكون التسارع ثابتاً مقداراً واتجاهاً أيضاً. أي أن

$$\mathbf{a} = 1.51 \text{ [m/s}^2\text{]}\ \boldsymbol{i} \qquad \forall\ \ t \geq 10 \text{ [s]}$$

أخيراً تتحدد سرعة الصندوق بعد استبدال $a = \frac{dv}{dt}$ في المعادلة 12 وإجراء التكامل المحدود

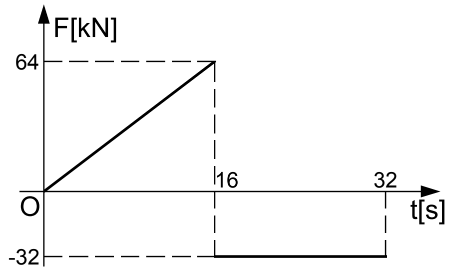
$$\int_{3.43}^{v} dv = 1.51 \int_{10}^{t} dt \ \Rightarrow\ v = 1.51\, t - 11.67$$

وفي اللحظة t = 20 ثانية يكون

$$v = 18.53 \text{ [m/s]} \qquad 13$$

سـؤال م 5.3

تطير طائرةٌ، كتلتها 8 أطنان، أفقياً وبخطٍ مستقيم، تحت تأثير القوة الأفقية $F = F_x$. أوجد سرعة الطائرة في اللحظة $t = 32[s]$ والمسافة المقطوعة حتى تلك اللحظة، إذا كانت سرعة الطائرة الابتدائية $v_o = 320$ [m/s] عند الزمن $t_o = 0$. أهمل قوة احتكاك الهواء .



شـكل م 5.3

الـحــل

قانون نيوتن الثاني للفترة الزمنية 0 < t < 16 ثانية للحركة في خطٍ مستقيم، على محور x كخط حركة الطائرة

$$m\,\ddot{x} = F_x(t) \qquad \Rightarrow \qquad 8\times10^3[\text{kg}]\times\ddot{x} = \frac{64\times10^3[\text{N}]}{16\,\text{s}}\,t$$

أو

$$a_x = \ddot{x} = 0.5t \quad [\text{m/s}^2] \quad \forall\ t\in(0,16) \qquad 1$$

ومن هذه المعادلة تتحدد سرعة الطائرة بتكامل طرفيها، أو

$$\dot{x} = v = 0.25\,t^2 + v_o$$

وبتعويض الشروط الابتدائية $v_o = 320\,[\text{m/s}]$ و $t_o = 0$ نجد أن سرعة الطائرة تخضع للمعادلة التالية

$$v = 0.25\ t^2 + 320 \qquad 2$$

سرعة الطائرة في نهاية الفترة الأولى، اللحظة $t = 16\,[\text{s}]$

$$v_{16} = v_{t=16\,[s]} = 0.25\times16^2 + 320 = 384\ [\text{m/s}]$$

في الفترة الثانية $16\,[\text{s}] < t < 32\,[\text{s}]$ تتعرض الطائرة إلى قوة كبحٍ مقدارها $F = 32\,[\text{kN}]$. وتبعاً لذلك تؤول المعادلة 1 إلى الشكل الجديد التالي

$$8\times10^3[\text{kg}]\times\ddot{x} = -32[\text{kN}] \ \Rightarrow\ \ddot{x} = -4 \quad [\text{m/s}^2]\ ,\quad \forall\ t\in(16,32) \qquad 3$$

ومرة أخرى؛ تتحدد السرعة في الفترة الثانية بعد استبدال $a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ في المعادلة 3 ، ثم إجراء تكامل المعادلة الناتجة أخذين بعين الاعتبار الشروط الابتدائية الجديدة

$$\int_{384}^{v} dv = -\ 4\int_{16}^{t} dt \qquad 4$$

ولتؤول تبعاً لذلك معادلة السرعة إلى الشكل البارامتري

$$v = 448 - 4\,t \qquad 5$$

سرعة الطائرة في نهاية الفترة الثانية، اللحظة $t = 32\ [\text{s}]$

$$v_{32} = 448 - 4\times32 \ \Rightarrow v_{32} = 320\ [\text{m/s}]$$

المسافة المقطوعة

تتحدد المسافة المقطوعة في الجزء الأول $0 < t < 16\,[\text{s}]$، من المعادلة 2 وذلك باستبدال السرعة بمشتقة المسافة x، ثُمَّ إجراء التكامل

$$x_{16} - x_o = \frac{0.25}{3}t^3 + 320\ t\Big|_0^{16}$$

$$= \frac{0.25}{3}\times16^3 + 320\times16 \ \Rightarrow\ x_{16} - x_o = 5.461\ [\text{km}] \qquad 6$$

كما تتحدد المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t = 16$ ثانية و $t = 32$ ثانية من تكامل المعادلة 5 بعد استبدال السرعة بمشتقة المسافة وترتيبها

$$x_{32} - x_{16} = 448\ t - 2\,t^2\Big|_{16}^{32} \quad \Rightarrow \quad x_{32} - x_{16} = 5.632\ [\text{km}] \qquad 7$$

وبجمع المسافتين الناتجتين نجد أن الطائرة قطعت حتى الثانية 32 المسافة

$$x = 5.461 + 5.632 = 11.093[\text{km}] \qquad 8$$

ســؤال م 6.3

يتحدد موضع جسيمٍ يتحرك على خطٍ مستقيم بالإزاحة

$$S = \frac{t^3}{3} + 12\,t + 8 \ \ [m]$$

حيث يقاس الزمن بالثانية. أوجد الزمن اللازم ليصل الجسيم إلى سرعة 48 متراً/الثانية مقيساً من لحظة البداية، وما تسارعه لحظتها ؟ وأخيراً، ما الإزاحة الكلية للجسيم مقيسةً من لحظة البداية حتى t = 4 ثانية؟

الـحــل

تتحدد سرعة وتسارع الجسيم بالتفاضل المتتالي للإزاحة بدلالة الزمن

$$v = \frac{dS}{dt} = t^2 + 12 \ \ [m/s] \qquad 1$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2\,t \ \ [m/s^2] \qquad 2$$

وعلى هذا الأساس نعوض السرعة v = 48 متراً في الثانية في المعادلة 1 لنجد الزمن المطلوب

$$48 = t^2 + 12 \ \ [m/s] \ \Rightarrow \ t = \pm 6 \ \ [s]$$

وبإلغاء جواب الإشارة السالبة (رياضياً يمثل الحركة قبل لحظة البداية إذ لا معنىً عملي له) فإن

$$t = 6 \ \ [s]$$

تسارع الجسيم من المعادلة 2

$$a = 2\times t = 2\times 6 = 12 \ \ [m/s^2]$$

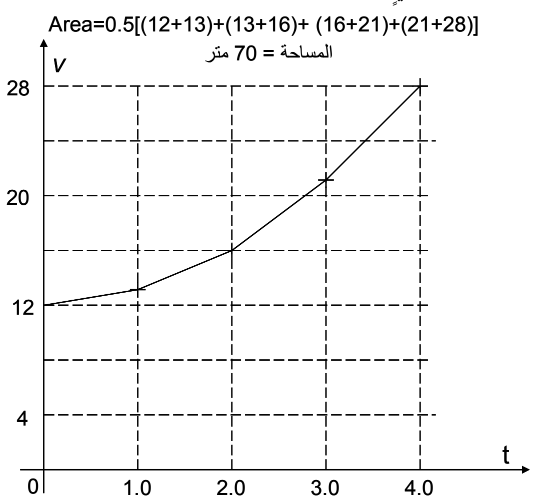
الإزاحة الكلية للجسيم مقيسةً من لحظة البداية حتى الثانية الرابعة، t = 4 ثواني

$$\Delta S = S_4 - S_0 \ \ [m]$$

$$\Delta S = \frac{4^3}{3} + 12\times 4 + 8 - 8 \ [m]$$

$$\Delta S = 69.33 \ \ [m]$$

وهذه الأخيرة يمكن تمثيلها بالمساحة المحصورة تحت المنحنى $v = t^2 + 12$ ، **شكل** م 6.3، وذلك بين اللحظتين t = 0 حتى اللحظة t = 4 ثانية.



شـــكل م 6.3: الإزاحة كتكامل السرعة

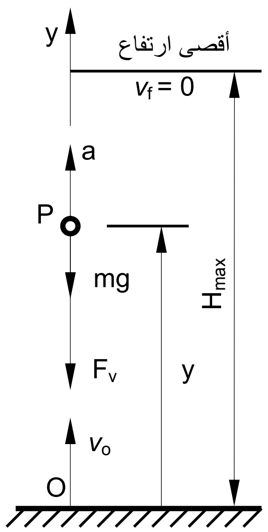
ســؤال م 7.3

تتحدد مقاومة الهواء لجسمٍ صاعدٍ للسماء بالعلاقة الاتجاهية

$$\mathbf{F}_v = -\,k^2\,mg\,v^2\,\boldsymbol{k}$$

حيث k^2 ثابتٌ، mg وزن الجسم و v سرعته. احسب الارتفاع الأقصى للجسم وزمن صعوده لهذا الارتفاع إذا ما انطلق بالسرجهة الابتدائية $\boldsymbol{v}_0$.

الحـــــل



شـكل م 7.3

نحدد المحور Oy والنقطة P عليه لتمثل موقعاً اعتباطياً للجسم أثناء صعوده للأعلى، بينما تمثل النقطة O بدايةَ الحركة. القوى المؤثرة على الجسم هي قوة وزنه **mg** للأسفل، $\mathbf{F}_v$ قوة مقاومة الهواء للأسفل بعكس الحركة للأعلى. وتبعاً لذلك، نحدد مُتَّجِهَ تسارع الجسم للأعلى. المعادلة التفاضلية لحركة الجسم

$$m\ddot{y}=-mg-k^2mg\dot{y}^2$$

وحل هذه المعادلة بدلالة التسارع يعطي بعد اختصار m من الطرفين

$$\ddot{y}=-g\,[1+k^2\dot{y}^2] \qquad 1$$

وباستبدال التسارع $\ddot{y}=\frac{d\dot{y}}{dt}$ ومن ثمّ ترتيب المعادلة 1 وإجراء التكامل المحدود

$$\int_{v_o}^{\dot{y}}\frac{d\dot{y}}{1+k^2\dot{y}^2}=-g\int_0^t dt \qquad 2$$

يعطي زمن الرحلة t

$$t=\frac{1}{g\,k}\left\{\arctan kv_o-\arctan k\dot{y}\right\} \qquad 3$$

الزمن اللازم للوصول لأقصى ارتفاع يعني استبدال $v=\dot{y}=0$ في المعادلة 3

$$T=\frac{1}{gk}\arctan k\,v_o \qquad 4$$

أما الارتفاع الذي يصله الجسم فيتحدد باستبدال $\ddot{y}=\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}$ في المعادلة 1، ولنحصل بعد الترتيب على التكامل المحدود

$$\int_{v_o}^{\dot{y}}\frac{\dot{y}d\dot{y}}{1+k^2\dot{y}^2}=-g\int_0^y dy \Rightarrow \frac{1}{2k^2}\ln\frac{1+k^2\dot{y}^2}{1+k^2v_o^2}=-gy$$

والذي حله بدلالة y يعطي

$$y=\frac{1}{2gk^2}\ln\frac{1+k^2v_o^2}{1+k^2\dot{y}^2} \qquad 5$$

يتحدد الارتفاع الأقصى بوضع $v=\dot{y}=0$ في المعادلة 5

$$H=y_{max}=\frac{1}{2gk^2}\ln\left(1+k^2v_o^2\right) \qquad 6$$

سـؤال م 8.3

أُطلقت قذيفةٌ من سطح الأرض عمودياً للأعلى وبالسرجهة الابتدائية $\mathbf{v}_o=v_o\mathbf{k}$، وذلك تحت تأثير قوة الجاذبية $\mathbf{F}_r=-\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r$.

أكتب العلاقة بين الســرعة وارتفاع القذيفة. وما أقصى ارتفاعٍ تصله القذيفة؟

الحـــــل

تتم الحركة في الاتجاه الرأسي ، ولذلك نكتب قوة الجاذبية كمركبة y

$$\mathbf{F_r}=-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e_r} \Rightarrow \mathbf{F_y}=-\frac{gR^2m}{y^2}\boldsymbol{j} \qquad 1$$

والتي تساوي مضروب الكتلة والتسارع

$$F_y=m\ddot{y} \qquad 2$$

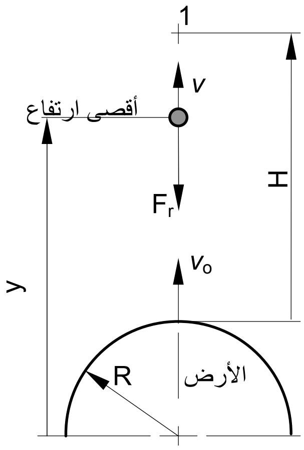
ومن تساوي المعادلتين 1 و 2 وللاتجاه الرأسي يكون

$$\ddot{y}=-\frac{gR^2}{y^2} \qquad 3$$

وباستبدال $\ddot{y}=\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}$ نكتب المعادلة 3 بصيغةٍ أخرى

$$\dot{y}d\dot{y}=-\frac{gR^2}{y^2}dy \qquad 4$$

أو بعد إجراء التكامل



شـــكل م 8.3

$$\dot{y}^2\Big|_{v_o}^{v}=\frac{gR^2}{y}\Big|_{R}^{y} \Rightarrow v^2-v_o^2=2gR^2\left\{\frac{1}{y}-\frac{1}{R}\right\} \qquad 5$$

وصول القذيفة لأقصى ارتفاع ، يعني أن $y_{max}=H+R$ ، والسرعة النهائية تؤول للصفر $v=0$. حل المعادلة الناتجة 5 بدلالة السرعة v_o يعطي

$$v_o^2=2gR^2\left\{\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right\} \Rightarrow v_o=\sqrt{\frac{2gRH}{R+H}} \qquad 6$$

وكلما كانت H قريبة من سطح الأرض فإن H<<R ، فإن السرعة الابتدائية تحسب بدلالة H

$$v_o=\sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}=\sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{R}}} \quad \Rightarrow \quad v_o=\sqrt{2gH} \qquad 7$$

أما إذا كانت H كبيرة جداً، H>>R، فإن السرعة الابتدائية تحسب بدلالة R

$$v_o=\sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}=\sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{R}{H}}} \quad \Rightarrow \quad v_o=\sqrt{2gR} \qquad 8$$

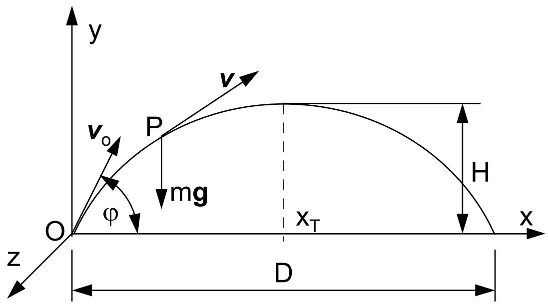
سـؤال م 9.3

أوجد أقصى مدىً range وأقصى ارتفاعٍ تصله قذيفة، كتلتها m، تنطلق في الهواء باحتكاك مهمل وبالسرجهة الابتدائية من الموقع O

$$\boldsymbol{v}_o=v_o\cos\varphi\ \boldsymbol{i}+v_o\sin\varphi\ \boldsymbol{j}$$

الحـــــل

نحدد نقطة أصل الإحداثيات الديكارتية الثابتة في الموقع الابتدائي للقذيفة O. نحدد المحور Oy للأعلى والمحور Ox لليمين بحيث تَتِمُّ الحركة في المستوى Oxy. ندرس حركة القذيفة في موقعٍ اعتباطي P، ونحدد القوى المؤثرة عليها في ذلك الموضع. قوة الوزن $\mathbf{mg}=-mg\boldsymbol{j}$ هي القوة الوحيدة المؤثرة وتؤثر للأسفل. ولذلك نكتب معادلة الحركة 2.2 بدلالة مركباتها الثلاث



$$m\ddot{x}=0 \qquad 1$$

$$m\ddot{y}=-mg \qquad 2$$

$$m\ddot{z}=0 \qquad 3$$

لحل هذه المعادلات نحدد الشروط الابتدائية للحركة

$$t = t_0 = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{r}_o = 0 \ \ \&$$

$$\boldsymbol{v}_o = v_o \cos\varphi \, \boldsymbol{i} + v_o \sin\varphi \, \boldsymbol{j} \qquad 4$$

شـــكل م 9.3

وبإجراء التكامل الأول على المعادلات 1- 3 مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية للحركة 4 و بعد قسمة الطرفين على الكتلة m نجد أن مركبات السرجهة

$$\dot{x}=v_o\cos\varphi \qquad 5$$

$$\dot{y}=-gt+v_o\sin\varphi \qquad 6$$

$$\dot{z}=0 \qquad 7$$

كما أن إجراء التكامل الثاني على المعادلات الأخيرة 5 - 7 يُعطي مركبات الإزاحة

$$x = v_o \ t \ \cos\varphi \qquad 8$$

$$y = - g\, t^2 / 2 + v_o\, t \sin\varphi \qquad 9$$

$$z = 0 \qquad 10$$

وباستبدال الزمن t من المعادلة 8 وتعويضه في المعادلة 9 نحصل على معادلة حركة القذيفة

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\varphi}x^2 \qquad 11$$

وبالتالي فحركة القذيفة حركةٌ منحنيةٌ تتم في المستوى الرأسي Oxy، إذ يرسم مسار القذيفة في الفراغ معادلة القطع المكافئ. يجب المعرفة أن تأثير قوة الوزن **mg** على القذيفة جعلها لا تتحرك حركة في خط مستقيم وذلك لان مُتَّجِهَ السرجهة لا يتسامت مع متَّجِهِ القوة. ويتحدد أقصى ارتفاعٍ تصله القذيفة من المعادلة 11، وذلك بحساب مشتقة y بدلالة x ومساواة الناتج بالصفر

$$\frac{dy}{dx} = \tan\varphi - \frac{g}{v_o^2\cos^2\varphi}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{v_o^2\sin 2\varphi}{2g} \qquad 12$$

وباستبدال x في المعادلة 11 بقيمتها من المعادلة 12، نحصل بعد ترتيب المعادلة الأولى على أقصى ارتفاع

$$H=y_{max}\Big|_{x=x_T} = \frac{1}{2g}v_o^2\sin^2\varphi \qquad 13$$

ولأن x من المعادلة 12 تمثل منتصف المسافة، فإن أقصى مدىً تصله القذيفة يتحدد كضعف المسافة x_T

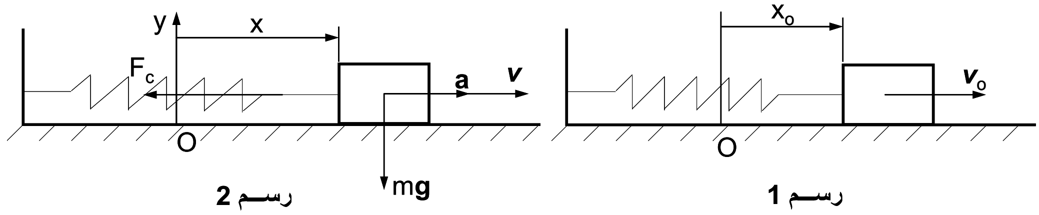
$$D = 2x_T = \frac{v_o^2 \sin 2\varphi}{g} \qquad 14$$

أخيراً، من السهولة بمكان معرفة الزاوية φ التي تعطي القذيفة أقصى مدىً ممكن. إذ يكون ذلك عند الزاوية°45 = φ في المعادلة 14

$$D = D_{max} = \frac{v_o^2}{g} \qquad 15$$

سـؤال م 10.3

يتحرك صندوقٌ، كتلته m، مشبوكٌ مع زنبركٍ معامل مرونته c على سطحٍ أفقيٍ وأملس. إذا ابتدأ الصندوق الحركة من الموضع x_o بالسرجهة الابتدائيةٍ $\boldsymbol{v}_o = v_o\boldsymbol{i}$. أوجد معادلة حركة الصندوق كدالة إزاحةٍ وزمن، مبيناً أثر الشروط الابتدائية للحركة.



رسم 2 رسم 1

شكل م 11.3

الـحــــل

نحدد نقطة الأصل في الموقع O ، بحيث تنطبق على وضع الاستقرار للزنبرك. نمد المحور Ox لليمين موازياً للحركة.
الشروط الابتدائية للحركة هي

$$t = t_o = 0 \;\Rightarrow\; x = x_o \;\&\; v = v_o \qquad 1$$

نحدد على الرسم 2 القوى المؤثرة على الصندوق وهي : قوة وزنه mg للأسفل، القوة المرنة Fc في الزنبرك لليسار بعكس الإزاحة وقوة رد فعل السطح N للأعلى. كما نحدد مُتَّجِهَ تسارع الصندوق $a = \ddot{x}i$ لليمين. قانون نيوتن الثاني لحركة الصندوق وللاتجاه x

$$m\ddot{x} = -cx \qquad 2$$

وباستبدال $\ddot{x} = \dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$ ومن ثَمَّ ترتيبها يكون

$$m\dot{x}d\dot{x} = -cxdx \qquad 3$$

وبإجراء التكامل المحدود على المعادلة 3 ، مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية للحركة 1 نجد أن

$$m\left(\dot{x}^2 - v_o^2\right) = -c\left(x^2 - x_o^2\right) \qquad 4$$

وحل هذه المعادلة بدلالة السرعة يعطي

$$\dot{x} = \sqrt{v_o^2 - \frac{c}{m}\left(x^2 - x_o^2\right)} \qquad 5$$

كما أن حل المعادلة 5 كدالة إزاحة بدلالة الزمن يتطلب اجراء التكامل

$$\int_0^t dt = \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_o^2 - \dfrac{c}{m}\left(x^2 - x_o^2\right)}}$$

لنجد أن الزمن

$$t = \sqrt{\frac{m}{c}}\left\{\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{m}{c}v_o^2 + x_o^2}} - \arcsin\frac{x_o}{\sqrt{\frac{m}{c}v_o^2 + x_o^2}}\right\} \qquad 6$$

ومنها الإزاحة

$$x = \sqrt{\frac{m}{c}v_o^2 + x_o^2}\ \sin\left\{\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \varphi\right\} \qquad 7$$

حيث إن

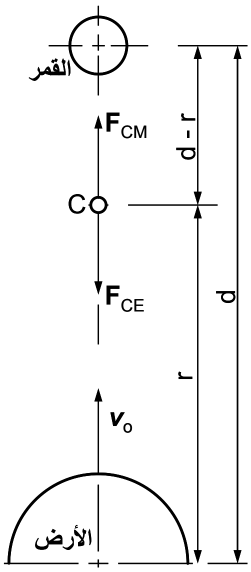
$$\varphi = \arcsin\frac{x_o}{\sqrt{\frac{m}{c}v_o^2 + x_o^2}} \qquad 8$$

هذه المعادلات 7 و 8 تمثل حلاً لمعادلات الحركة الذبذبية عند انعدام المقاومة ولشروطٍ ابتدائيةٍ اعتباطية. وتعتبر المعادلات المذكورة مثالاً على الحركة التوافقية harmonic motion في بعدٍ واحد.

سـؤال م 11.3

ما بعد القمر الصناعي عن الأرض الذي يجعل قوتا الجذب بينه وبين كلٍ من الأرض والقمر متساويتين؟ القمر الصناعي يصعد عمودياً من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها v_o.

الحــــل



شـكل م 11.3

نفترض أن C نقطةٌ يصلها القمر الصناعي تتساوى عندها قوتي الجذب بينه وبين كلٍ من الأرض والقمر. أي أن

$$F_{CM} = F_{CE} \qquad 1$$

حيث أن F_{CE} قوة جذب الأرض وF_{CM} قوة جذب القمر للقمر الصناعي في الموقع C.

نستخدم العلاقة الاتجاهية لقوة الجذب الكوني $\mathbf{F}_r = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r$ لنجد أن

$$F_{CM} = -\frac{GM_M m}{(d-r)^2} \quad \& \quad F_{CE} = -\frac{GM_E m}{r^2} \qquad 2$$

حيث أن G ثابت الجاذبية، M_M كتلة القمر بينما M_E كتلة الأرض، كما أن باقي الرموز تعرف من **الشكل** المرافق. وباستبدال العلاقتين في 2 في المعادلة 1 نكتب باختصار قليل

$$\frac{M_E}{r^2} = \frac{M_M}{(d-r)^2} \qquad 3$$

أو كعلاقة جديدة بدلالة r

$$r = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_M}{M_E}}} \qquad 4$$

ومن **جدول المعلومات الفلكية في الباب السادس** نجد أن

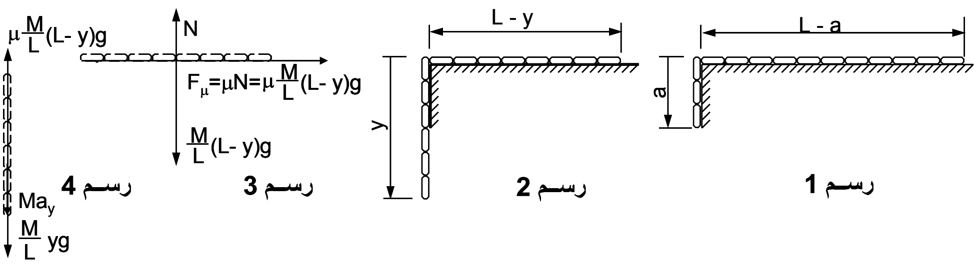
$$r = \frac{384400}{1+\sqrt{\frac{7.35\times10^{22}}{5.97\times10^{24}}}} = 346000\ [km] \qquad 5$$

ســؤال م 12.3

تتواجد سلسلة حديدية طولها L، وكتلتها M على منضدة أفقية. تبدأ السلسلة بالانزلاق باحتكاكٍ مهمل وذلك عندما يتدلى جزءٌ منها طوله a عن الحافة الرأسية للمنضدة.

1- أكتب معادلة حركة السلسلة كدالة زمنية وما الزمن اللازم كي تَبْرَحَ المنضدة؟

2- إذا كان معامل الاحتكاك بين السلسلة والمنضدة μ فما أقصى سرعة تبرح بها السلسلة المنضدة؟



شـــكل م 12.3

الــحـــل

نفترض حالة الاحتكاك أولاً، $\mu > 0$، ومن ثَمَّ نُلغيه في المعادلات الناتجة. طول السلسلة L، وكتلتها M، لذلك فكتلة وَحْدَة طولها $\frac{M}{L}$.

إذا افترضنا جزءً متدلياً من السلسلة، طوله y ، فإن كتلته $\frac{M}{L}y$، وقوة وزنه $\frac{M}{L}yg$ باتجاهِ الأسفل. تؤثر على الجزء المتبقي من السلسلة على السطح الأفقي للمنضدة، طوله $(L - y)$ وكتلته $\frac{M}{L}(L-y)$، قوة الوزن $\frac{M}{L}(L-y)g$ للأسفل وقوة الاحتكاك $(L - y)$ $F\mu = \mu N = \mu\frac{M}{L}g$ باتجاهِ الخلف. والقوة الأخيرة تعيق حركة السلسلة بأكملها. قانون نيوتن الثاني لحركة الجزء المتحرك - كتلة السلسلة M وتسارعها a_y بينما القوة المؤثرة فهي محصلة القوتين: قوة وزن الجزء المتدلي مطروحاً منها قوة الاحتكاك الواردة أعلاه

$$M a_y = \frac{M}{L} y g - \mu \frac{M}{L}(L-y) g \qquad 1$$

وباستبدال $a_y = \ddot{y}$، نكتب المعادلة 1 بقليلٍ من الاختصار بالصيغة التالية

$$\ddot{y} = \frac{g}{L}[y + \mu(y - L)] \qquad 2$$

التي تمثل المعادلة التفاضلية لحركة السلسلة. ولحساب سرعة انزلاق السلسلة عن السطح الأفقي نستبدل $\ddot{y} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}$ في المعادلة 2 ، ونعيد ترتيبها

$$\dot{y}d\dot{y} = \frac{g}{L}\,[\,y + \mu\,(\,y - L\,)]\,dy \qquad 3$$

وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة 3 للشروط الابتدائية الكينماتيكية $y_o = a$ يتبعها $v_o = 0$

$$\int_0^{v} \dot{y}d\dot{y} = \frac{g}{L}\int_a^{y}[\,y + \mu\,(\,y - L\,)]\,dy$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L}\left\{\frac{y^2 - a^2 + \mu[(y-L)^2 - (a-L)^2]}{2}\right\} \qquad 4$$

أو كدالة سرعة بعد إلغاء الإشارة السالبة، إذ لا معنى للجذر السالب

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left\{y^2 - a^2 + \mu[(y-L)^2 - (a-L)^2\right\}} \qquad 5$$

السرعة القصوى للسلسلة تحدث عندما تصبح $y = L$ في المعادلة 5

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left\{L^2 - a^2 - \mu\,(L-a)^2\right\}} \qquad 6$$

وبإلغاء الحد الذي يشمل الاحتكاك $\mu = 0$ في المعادلة 5 ينتج أن السرعة القصوى

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left\{y^2 - a^2\right\}} \qquad 7$$

وبتعويض السرعة كمشتقة مسافة يكون

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\,dt \;\Rightarrow\; \ln\left\{\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right\} = \sqrt{\frac{g}{L}}\,t \qquad 8$$

الزمن اللازم للسلسلة كي تبرح المنضدة T ينشأ عند التعويض $y = L$ في المعادلة 8

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left\{\frac{L + \sqrt{L^2 - a^2}}{a}\right\} \qquad 9$$